提要 174：包含單位階梯函數之數學模式的解(II)

茲舉一範例說明包含單位階梯函數$u(t-a)$之數學模式，如何引用 *Laplace* 積分轉換方法推求其解。以 *Laplace* 積分轉換方法解析常微分方程式時，其解析過程如圖 1 所示；以 *Laplace* 積分轉換解析偏微分方程式時，其解析過程如圖 2 所示。

圖 1 的意思是說，若問題爲常微分方程式的解析，則引用 *Laplace* 積分轉換方法解析問題時，可將常微分方程式改寫爲與參數 s 相關之代數方程式，然後推導出問題於 s 定義域的解，最後再進行適當之 *Laplace* 積分反轉換，即可研討出時間域與 t 變數有關之解。

圖 2 的意思則是說，若問題是屬於偏微分方程式的解析，則引用 *Laplace* 積分轉換方法解析問題時，可將偏微分方程式中之變數 t 改寫爲參數 s，因此，在解析過程當中，雖然仍需面對包含微分項次的解析，但已降低解題的難度，而能得出與參數 s 相關之解，最後再進行適當之 *Laplace* 積分反轉換，即可研討出時間域與 t 變數有關之解。這一部分的討論，在後面的單元於討論偏微分方程式的解析時，會再加以介紹。

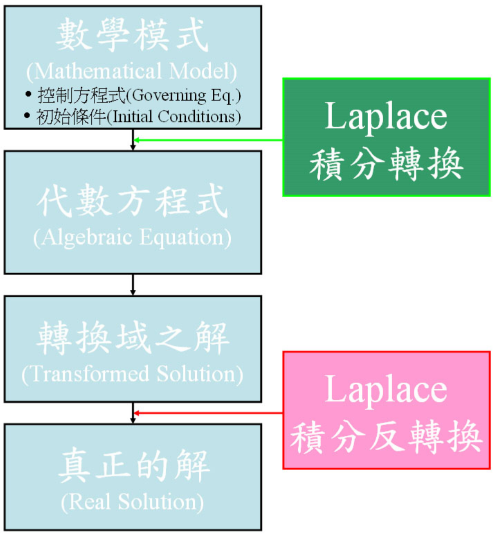

圖 1　以 *Laplace* 積分轉換解析常微分方程式之觀念流程圖

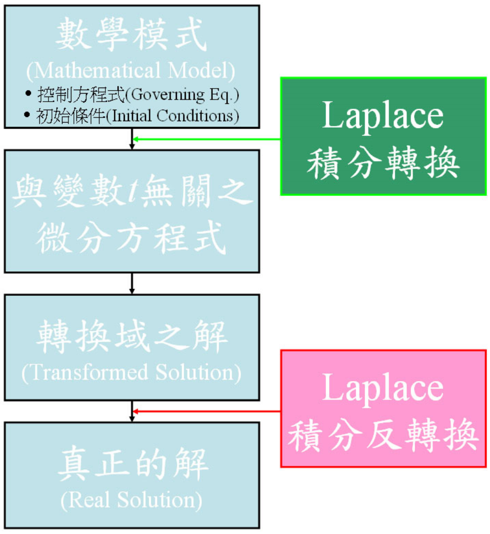

圖 2　以 *Laplace* 積分轉換解析偏微分方程式之觀念流程圖

關於 *Laplace* 積分轉換方法的應用，一定要記住關鍵的 17 個 *Laplace* 積分轉換公式，如表 1 所示。

範例一

試解析如下所示振動問題之數學模式：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5y=r(t)\ ,\ \ y(0)=0\ ,\ \ \frac{dy(0)}{dt}=0\ ,\ \ r(t)=u(t)-u(t-1)$$

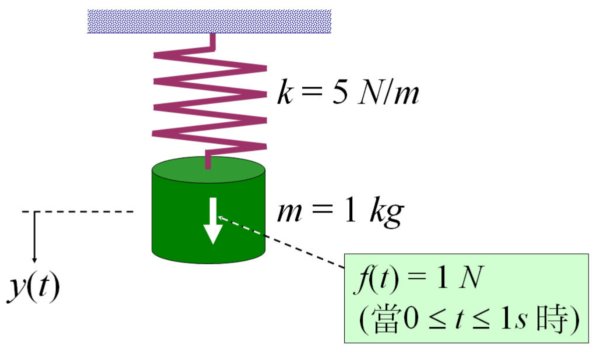

圖 3　振動問題示意圖

其中$\frac{d^2y}{dt^2}+5y=u(t)-u(t-1)$是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；當$0\le t\le 1$時，有 $1N$ 的外力作用在物體上，之後作用的外力就移除了；$y(0)=0$表物體之初始位置爲平衡位置；$\frac{dy(0)}{dt}=0$指物體無初始向下速度。本題是擬推求質量爲 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析。首先讓控制方程式乘以 e^{-st}，再對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之積分，亦即：

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + 5y \right) e^{-st} dt = \int_0^\infty [u(t) - u(t-1)] e^{-st} dt$$

上式等號左邊可改寫爲先積分再作相加之運算：

$$\int_0^\infty \frac{d^2 y}{dt^2} e^{-st} dt + \int_0^\infty 5y\, e^{-st} dt = \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt - \int_0^\infty u(t-1) e^{-st} dt \tag{1}$$

然後進行部分積分(*Integration by Part*，或譯爲分佈積分)之運算，此一運算是許多 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據。在前面單元的討論中，已介紹過 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換，並將其結果放在表 1 之 17 個公式中，若讀者已背下這 17 個 *Laplace* 積分轉換公式，應能很快知道 $y''(t)$ 的結果，由表 1 知，$L\{y''(t)\} = s^2 \int_0^\infty y\, e^{-st} dt - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}$。另外，因爲 $L\{u(t-a)\} = e^{-as}/s$，所以 $L\{u(t)\} = 1/s$、$L\{u(t-1)\} = e^{-s}/s$。基於此，式(1)可改寫爲：

$$\left[s^2 \int_0^\infty y\, e^{-st} dt - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt} \right] + 5\int_0^\infty y\, e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \tag{2}$$

再將問題之初始條件 $y(0) = 0$、$\frac{dy(0)}{dt} = 0$ 代入上式，則可得：

$$s^2 \int_0^\infty y\, e^{-st} dt + 5\int_0^\infty y\, e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \tag{3}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第二個部分。經整理後，可得：

$$(s^2 + 5)\int_0^\infty y\, e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \tag{4}$$

亦即：

$$\int_0^{\infty} y\, e^{-st} dt = \frac{1}{s\left(s^2+5\right)} - \frac{e^{-s}}{s\left(s^2+5\right)} \tag{5}$$

上式稱爲問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，通常以符號 $Y(s)$ 表示之。也就是說，問題於 s 定義域之解爲：

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+5\right)} - \frac{e^{-s}}{s\left(s^2+5\right)} \tag{6}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第三個部分。以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行式(6)之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} Y(s) e^{st} ds$ ，但是此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，目前大部分的讀者都尙未學過複變分析，所以無能爲力；二是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，如表 1 所示，姑且將此一方法稱爲「背影法」。亦即，1 的背影是 $1/s$，因此看到 $1/s$ 時，就想到它是 1 的背影，所以 $1/s$ 的 *Laplace* 反轉換就是 1；又例如 $\cos(at)$的 *Laplace* 轉換是 $s/(s^2+a^2)$，因此看到 $s/(s^2+a^2)$時，就想到它是 $\cos(at)$的背影，所以 $s/(s^2+a^2)$的 *Laplace* 反轉換就是 $\cos(at)$。其餘之各種 *Laplace* 轉換關係式，亦可依此方式加以解釋。

式(6)可改寫爲簡單之部分分式：

$$Y(s) = \left(\frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+5}\right) - \left(\frac{d}{s} + \frac{es+f}{s^2+5}\right)e^{-s} \tag{6'}$$

通分後，可得：

$$Y(s) = \frac{a\left(s^2+5\right) + (bs+c)s}{s\left(s^2+5\right)} - \frac{d\left(s^2+5\right)+(es+f)s}{(s+1)(s+5)}e^{-s} \tag{7}$$

比較係數後可知：

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ 5a=1 \\ d+e=0 \\ f=0 \\ 5d=1 \end{cases}$$

解析此聯立代數方程式可得：$a=\dfrac{1}{5}$、$b=-\dfrac{1}{5}$、$c=0$、$d=\dfrac{1}{5}$、$e=-\dfrac{1}{5}$、$f=0$。

亦即：

$$Y(s)=\left(\frac{1/5}{s}+\frac{-1/5\,s}{s^2+5}\right)-\left(\frac{1/5}{s}+\frac{-1/5\,s}{s^2+5}\right)e^{-s} \tag{8}$$

因此問題於時間域 t 之解爲：

$$y(t)=\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}-\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}+\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{se^{-s}}{s^2+5}\right\} \tag{9}$$

由表 1 知：

$$L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=f(t-a)u(t-a)\text{，}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1\text{，}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos(at)$$

所以：

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}=u(t-1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{se^{-s}}{s^2+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}_{t\equiv t-1}u(t-1)=\cos\left(\sqrt{5}t\right)_{t\equiv t-1}u(t-1)=\cos\left[\sqrt{5}(t-1)\right]u(t-1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}=\cos\left(\sqrt{5}t\right)$$

故問題之解爲：

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{5}\left[1-\cos\left(\sqrt{5}t\right)\right]-\frac{1}{5}\left\{1-\cos\left[\sqrt{5}(t-1)\right]\right\}u(t-1)}$$

註：$r(t)=u(t)-u(t-1)$之圖形如以下所示：

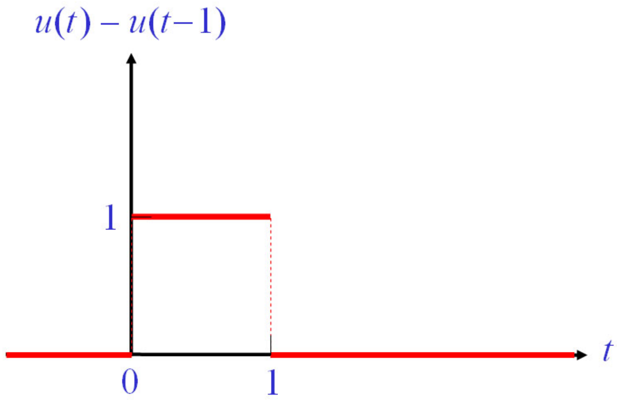

圖 4　$r(t)=u(t)-u(t-1)$之函數圖形

範例二

試解析如下所示振動問題之數學模式：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5y=6r(t)\text{，}y(0)=0\text{，}\frac{dy(0)}{dt}=0\text{，}r(t)=u(t)-u(t-1)$$

其中 $\frac{d^2y}{dt^2}+5y=u(t)-u(t-1)$ 是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；當 $0\le t\le 1$ 時，有 $6N$ 的外力作用在物體上，之後作用的外力就移除了；$y(0)=0$ 表物體之初始位置爲平衡位置；$\frac{dy(0)}{dt}=0$ 指物體無初始向下速度。本題是擬推求質量爲 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析。首先讓控制方程式乘以 e^{-st} ，再對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之積分，亦即：

$$\int_0^\infty\left(\frac{d^2y}{dt^2}+5y\right)e^{-st}dt=6\int_0^\infty\left[u(t)-u(t-1)\right]e^{-st}dt$$

上式等號左邊可改寫爲先積分再作相加之運算：

$$\int_0^\infty\frac{d^2y}{dt^2}e^{-st}dt+\int_0^\infty 5y\,e^{-st}dt=6\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt-6\int_0^\infty u(t-1)e^{-st}dt \qquad (1)$$

然後進行部分積分(*Integration by Part*，或譯爲分佈積分)之運算，此一運算是許多 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據。在前面單元的討論中，已介紹過 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換，並將其結果放在表 1 之 17 個公式中，若讀者已背下這 17 個 *Laplace* 積分轉換公式，應能很快知道 $y''(t)$ 的結果，由表 1 知，$L\{y''(t)\}=s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}$。另外，因爲 $L\{u(t-a)\}=e^{-as}/s$，所以 $L\{u(t)\}=1/s$、$L\{u(t-1)\}=e^{-s}/s$。基於此，式(1)可改寫爲：

$$\left[s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}\right]+5\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{6}{s}-\frac{6e^{-s}}{s} \qquad (2)$$

再將問題之初始條件 $y(0)=0$ 、 $\dfrac{dy(0)}{dt}=0$ 代入上式，則可得：

$$s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt+5\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{6}{s}-\frac{6e^{-s}}{s} \tag{3}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第二個部分。經整理後，可得：

$$\left(s^2+5\right)\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{6}{s}-\frac{6e^{-s}}{s} \tag{4}$$

亦即：

$$\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{6}{s\left(s^2+5\right)}-\frac{6e^{-s}}{s\left(s^2+5\right)} \tag{5}$$

上式稱爲問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，通常以符號 $Y(s)$ 表示之。也就是說，問題於 s 定義域之解爲：

$$Y(s)=\frac{6}{s\left(s^2+5\right)}-\frac{6e^{-s}}{s\left(s^2+5\right)} \tag{6}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第三個部分。以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行式(6)之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Y(s)e^{st}ds$ ，但是此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，目前大部分的讀者都尚未學過複變分析，所以無能爲力；二是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，如表 1 所示，姑且將此一方法稱爲「背影法」。亦即，1 的背影是 $1/s$，因此看到 $1/s$ 時，就想到它是 1 的背影，所以 $1/s$ 的 *Laplace* 反轉換就是 1；又例如 $\cos(at)$的 *Laplace* 轉換是 $s/(s^2+a^2)$，因此看到 $s/(s^2+a^2)$時，就想到它是 $\cos(at)$的背影，所以 $s/(s^2+a^2)$的 *Laplace* 反轉換就是 $\cos(at)$。其餘之各種 *Laplace* 轉換關係式，亦可依此方式加以解釋。

式(6)可改寫爲簡單之部分分式：

$$Y(s)=\left(\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+5}\right)-\left(\frac{d}{s}+\frac{es+f}{s^2+5}\right)e^{-s} \tag{6’}$$

通分後，可得：

$$Y(s)=\frac{a(s^2+5)+(bs+c)s}{s(s^2+5)}-\frac{d(s^2+5)+(es+f)s}{(s+1)(s+5)}e^{-s} \tag{7}$$

比較係數後可知：

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ 5a=6 \\ d+e=0 \\ f=0 \\ 5d=6 \end{cases}$$

解析此聯立代數方程式可得：$a=\frac{6}{5}$ 、$b=-\frac{6}{5}$ 、$c=0$ 、$d=\frac{6}{5}$ 、$e=-\frac{6}{5}$ 、$f=0$ 。

亦即：

$$Y(s)=\left(\frac{6/5}{s}+\frac{-6/5\,s}{s^2+5}\right)-\left(\frac{6/5}{s}+\frac{-6/5\,s}{s^2+5}\right)e^{-s} \tag{8}$$

因此問題於時間域 t 之解爲：

$$y(t)=\frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}-\frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}+\frac{6}{5}L^{-1}\left\{\frac{se^{-s}}{s^2+5}\right\} \tag{9}$$

由表 1 知：

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)u(t-a)\text{ ， }L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1\text{ ， }L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos(at)$$

所以：

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}=u(t-1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{se^{-s}}{s^2+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}_{t\equiv t-1}u(t-1)=\cos\left(\sqrt{5}t\right)_{t\equiv t-1}u(t-1)=\cos\left[\sqrt{5}(t-1)\right]u(t-1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}=\cos\left(\sqrt{5}t\right)$$

故問題之解爲：

$$\boxed{y(t)=\frac{6}{5}\left[1-\cos\left(\sqrt{5}t\right)\right]-\frac{6}{5}\left\{1-\cos\left[\sqrt{5}(t-1)\right]\right\}u(t-1)}$$

註：$r(t)=u(t)-u(t-1)$之圖形如以下所示：

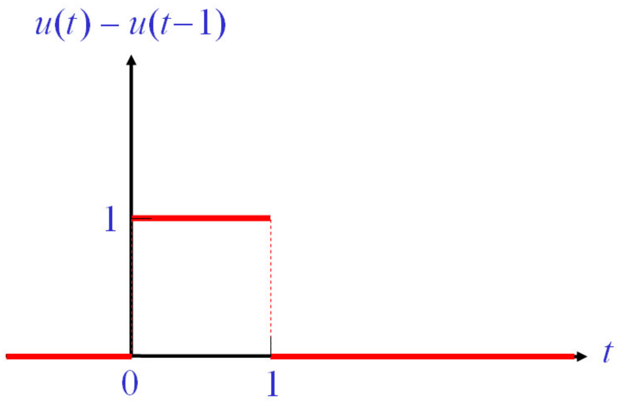

圖 4　$r(t)=u(t)-u(t-1)$之函數圖形

表 1　常用之 17 個 *Laplace* 積分轉換暨反轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ 其中 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)=\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right]\left[\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right]$