提要 172：*Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$在工程上的應用

首先來瞭解 *Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$之定義，其定義如下圖所示：

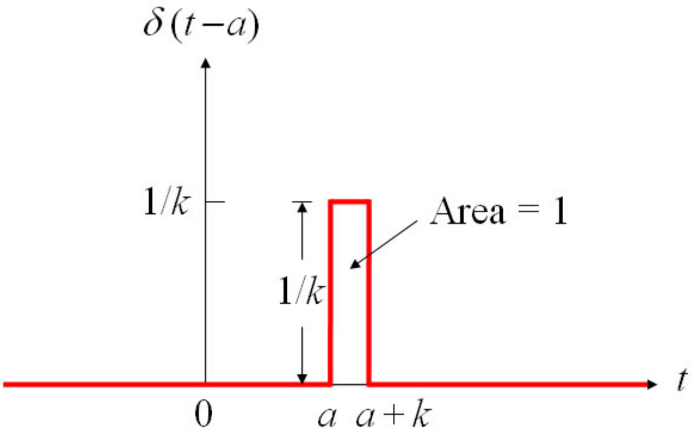

圖 1　*Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$之定義，其中$k \to 0$

亦即：

$$\delta(t-a)=\begin{cases}1/k, & if\ a \le t \le a+k \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

現在再來討論$\delta(t-a)$之應用。由單位階梯函數的討論知，如圖 1 所示之函數亦可以單位階梯函數加以表示。圖 2 係先引用單位階梯函數$u(t-a)$與$u[t-(a+k)]$，作相減之運算，得出類似圖 1 之結果，如圖 2 所示：

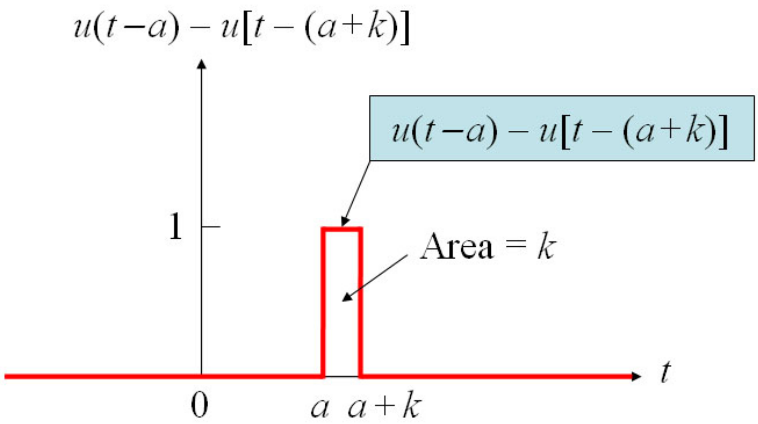

圖 2　引用單位階梯函數$u(t-a)$與$u[t-(a+k)]$作出類似 *Dirac's delta* 函數的圖形

再拿 $1/k$ 乘以圖 2 之函數 $u(t-k)-u[t-(a+k)]$，如圖 3 所示：

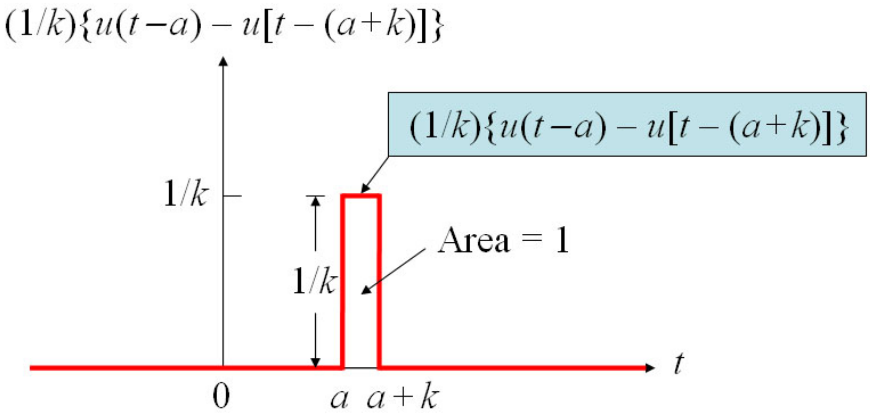

圖 3　$(1/k)\{u(t-k)-u[t-(a+k)]\}$之圖形

只要作極限之運算，讓 $k \to 0$，則圖 3 實際上就是圖 1。請讀者留意，圖 3 所示曲線下之面積大小爲 1，因此，圖 3 若乘以大小爲 P 之定值：

$$P\delta(t-a)$$

則曲線下之面積變爲 P，而當 $k \to 0$ 時，曲線下之面積大小仍然是 P，如圖 4 所示：

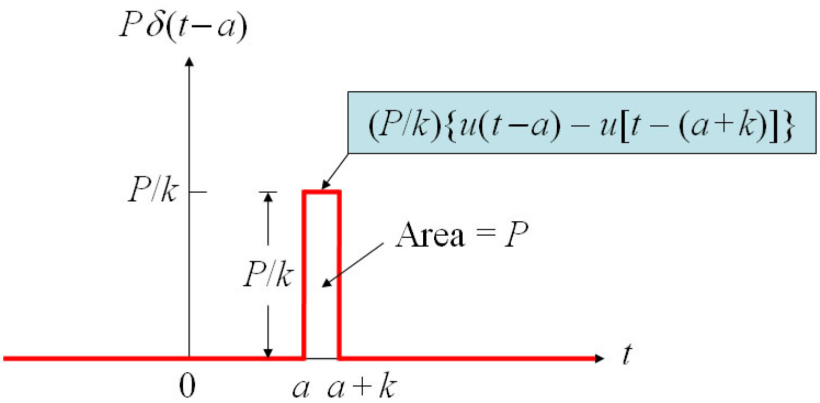

圖 4　$P\delta(t-a)$之示意圖

因爲 k 很小，所以圖 4 之意義爲：「在 $t=a$ 時，$P\delta(t-a)$之函數值爲 P；但是當 $t \neq a$ 時，$P\delta(t-a)$之函數值爲 0。」這是一種擾動只發生在某一特定位置或某一特定時間之情況的描述。因此，在力學問題中，可用以描述集中力之作用情況；在污染問題中，可用以描述點狀之污染源；在磁場問題中，亦可用以描述點狀之磁鐵等等。由此可知，*Dirac's delta* 函數 $\delta(t-a)$之應用非常廣泛。例如，若考慮如圖 5 所示之樑中點 $x=L/2$ 位置受集中力 P 之作用：

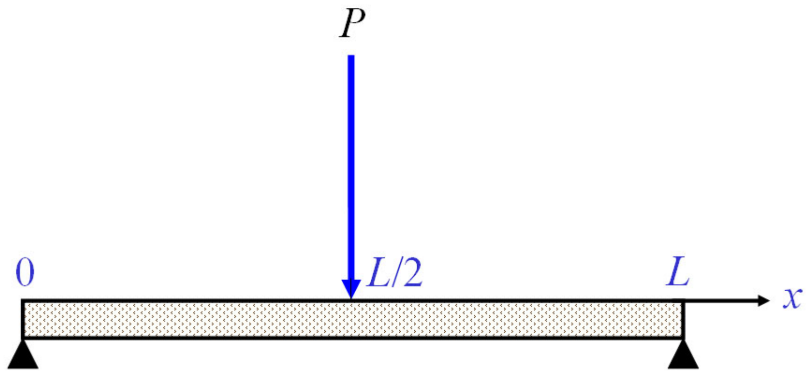

圖 5　樑中點受集中力作用之示意圖

再引用圖 4 之概念，則可將荷重 P 表爲函數 $P\delta(x-a)$。函數 $P\delta(x-a)$ 係表示：「當 $x=a$ 時，函數 $P\delta(x-a)$ 之值爲 P；在其他位置情況下，函數 $P\delta(x-a)$ 之函數值爲 0。」以上之描述，可以圖 6 加以表示：

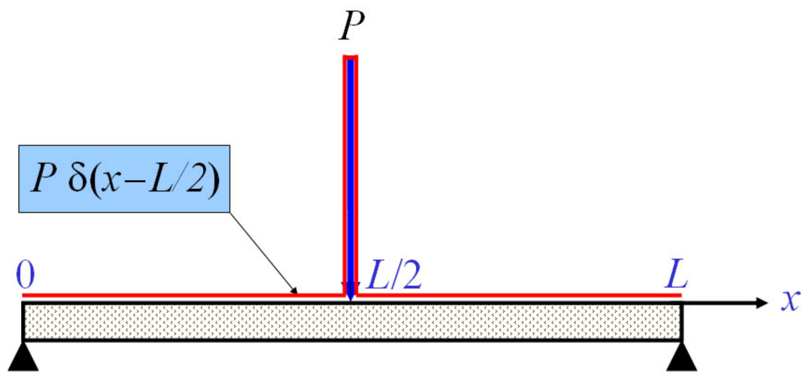

圖 6　以 *Dirac's delta* 函數表集中荷中作用時之示意圖

【附註】

1. 圖 1 至圖 4 之討論，是以 t 爲自變數；圖 5 與圖 6 之討論，是以 x 爲自變數。
2. 解析與 *Dirac's delta* 函數有關之微分方程式時，必須採用積分轉換的方法，之前所介紹的 Laplace 轉換，即是積分轉換方法的一種。