

提要 171：單位階梯函數 $u(t-a)$ 在工程上的應用

首先再解釋一遍單位階梯函數(*Unit Step Function* ; *Heaviside Function* ; 步階函數) $u(t-a)$ 之定義，其定義如下圖所示：

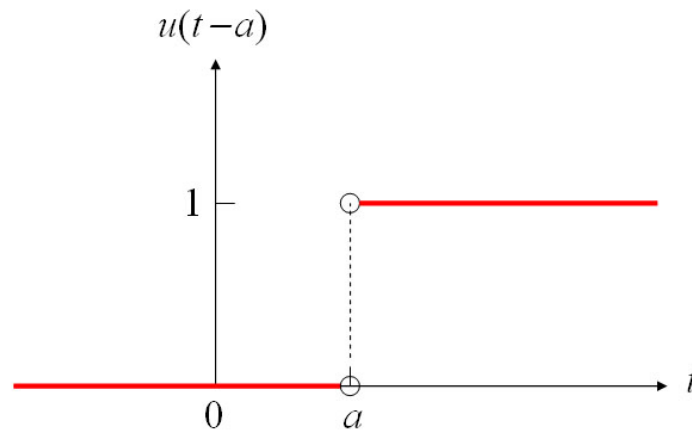


圖 1 單位階梯函數 $u(t-a)$ 之定義 (不含 a 點)

亦即：

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{for } t < a \\ 1, & \text{for } t > a \end{cases}$$

有一些書則將單位階梯函數定義成如圖 2 所示之型式，其中包含 a 點：

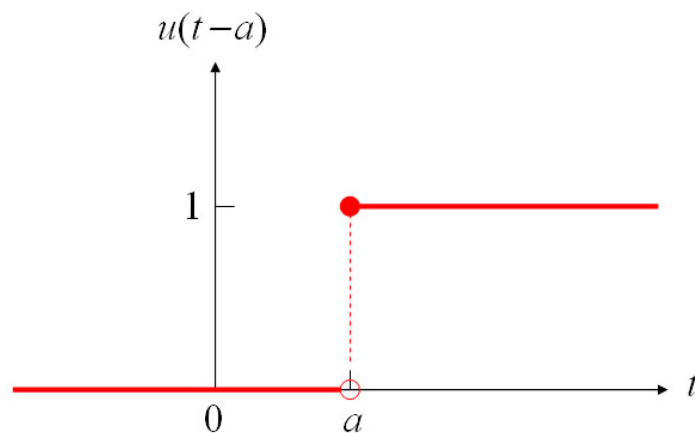


圖 2 單位階梯函數 $u(t-a)$ 之另一種常見的定義 (包含 a 點)

也就是說：

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{for } t < a \\ 1, & \text{for } t \geq a \end{cases}$$

因為端點有無定義，目前並不會影響結果，故以後之討論，筆者將不再特別強調單位階梯函數 $u(t-a)$ 在端點之定義。

現在再來討論 $u(t-a)$ 的應用。因為單位階梯函數 $u(t-a)$ 的函數值不是 0 就是 1，又任意函數值為有限值之函數 $f(t)$ 乘以 0 就是 0，任意函數值為有限值之函數 $f(t)$ 乘以 1 仍然是 $f(t)$ ，所以我們可以利用 $u(t-a)$ 的特性「修剪」函數 $f(t)$ 。首先，說明單位階梯函數 $u(t-a)$ 與 $u(t-b)$ 的圖形分別如圖 3 及圖 4 所示：

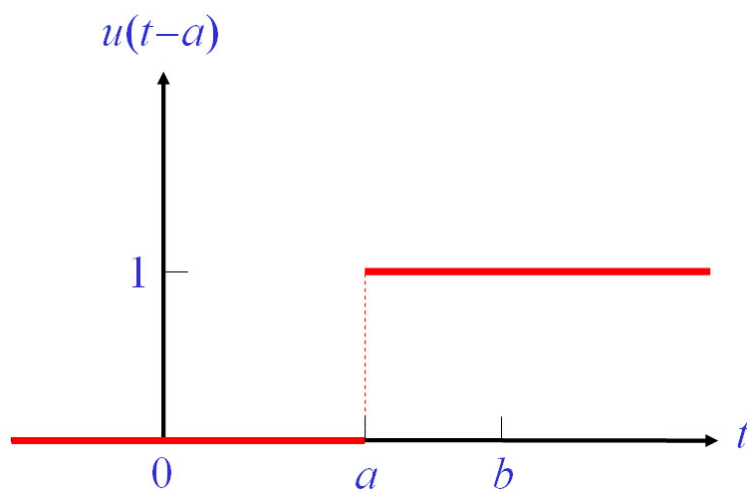


圖 3 單位階梯函數 $u(t-a)$ 之示意圖

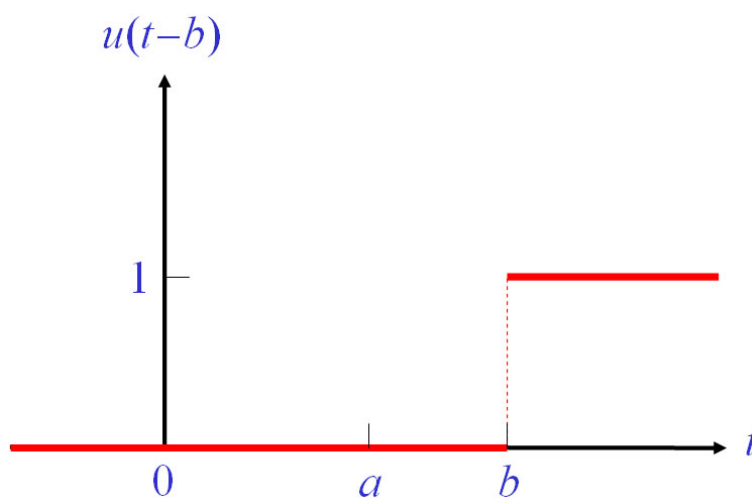


圖 4 單位階梯函數 $u(t-b)$ 之示意圖

引用單位階梯函數 $u(t-a)$ 與 $u(t-b)$ ，即可得出 $u(t-a)-u(t-b)$ ，如圖 5 所示：

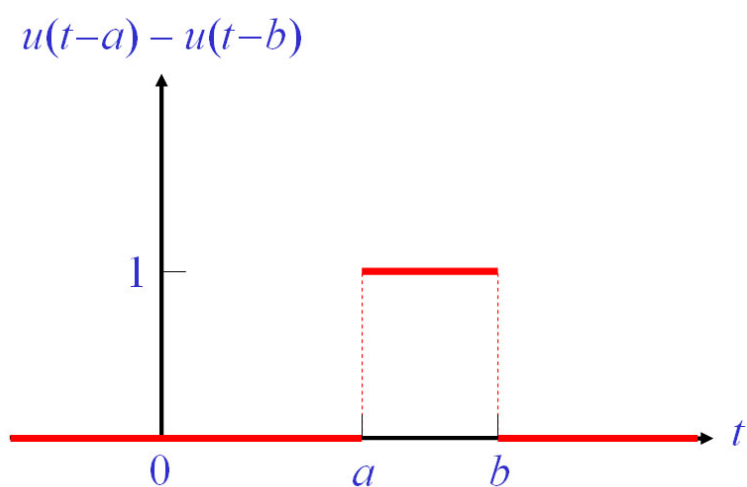


圖 5 $u(t-a)-u(t-b)$ 之示意圖

現在開始來「修剪」函數 $f(t)$ 。若函數 $f(t)$ 如圖 6 所示：

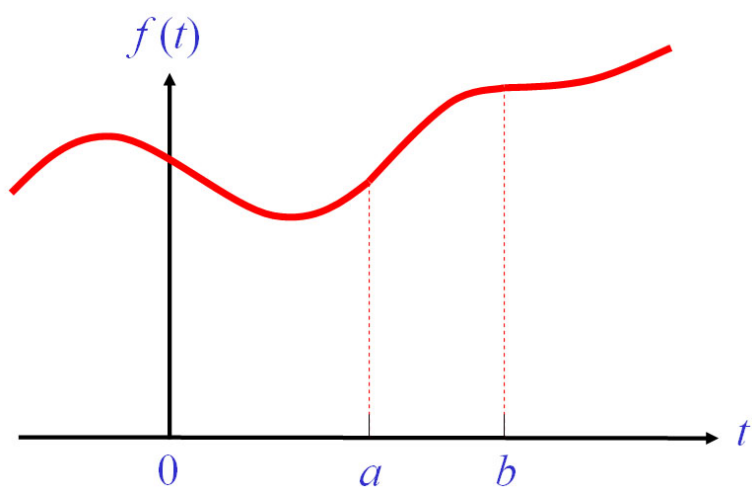


圖 6 函數 $f(t)$ 之示意圖

當函數 $f(t)$ 乘以如圖 3 所示之單位階梯函數時，函數 $f(t)$ 乘以 0 的部分其函數值會消失，函數 $f(t)$ 乘以 1 時則仍維持原來的圖形。亦即 $f(t)$ 乘以 $u(t-a)$ 之圖形如圖 7 所示：

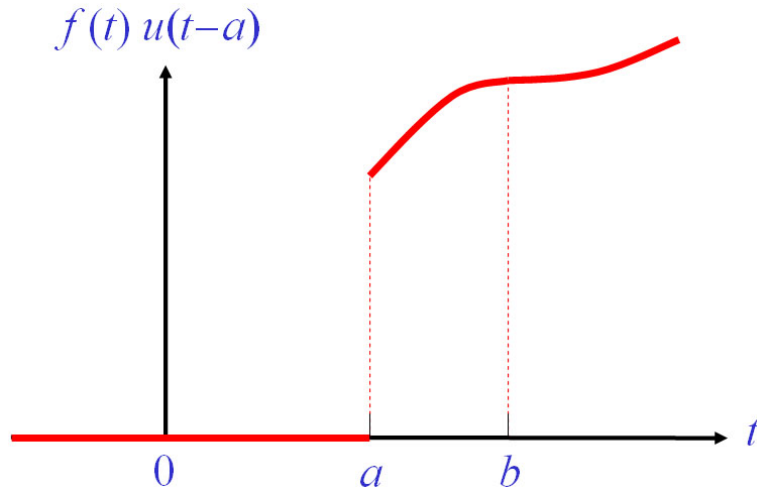


圖 7 $f(t)$ 乘以 $u(t-a)$ 之示意圖

同理， $f(t)$ 乘以 $u(t-a) - u(t-b)$ 之圖形如圖 8 所示：

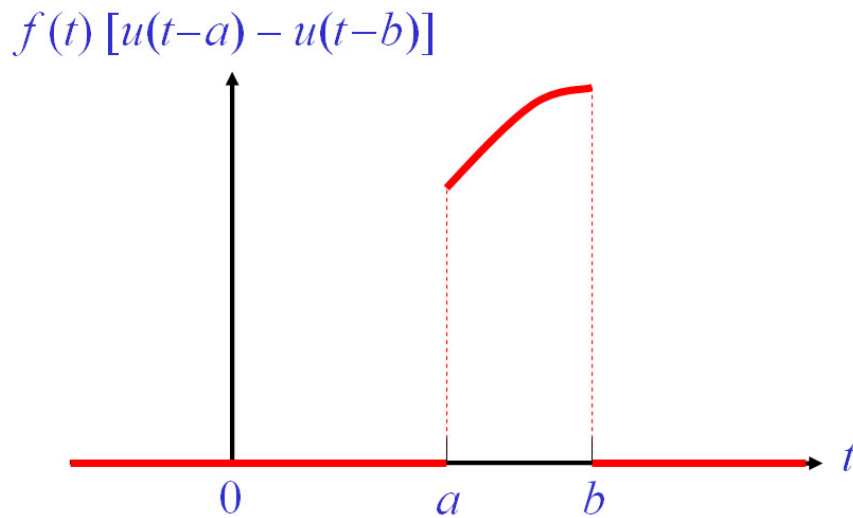


圖 8 $f(t)$ 乘以 $u(t-a) - u(t-b)$ 之示意圖

基於此，若是欲描述樑之某一部分受到如圖 9 所示之外力，就可以引用 $f(t)[u(t-a) - u(t-b)]$ 的概念。因樑之作用力的位置係與空間變數 x 有關，故將自變數由 t 更改為 x ，如圖 9 所示：

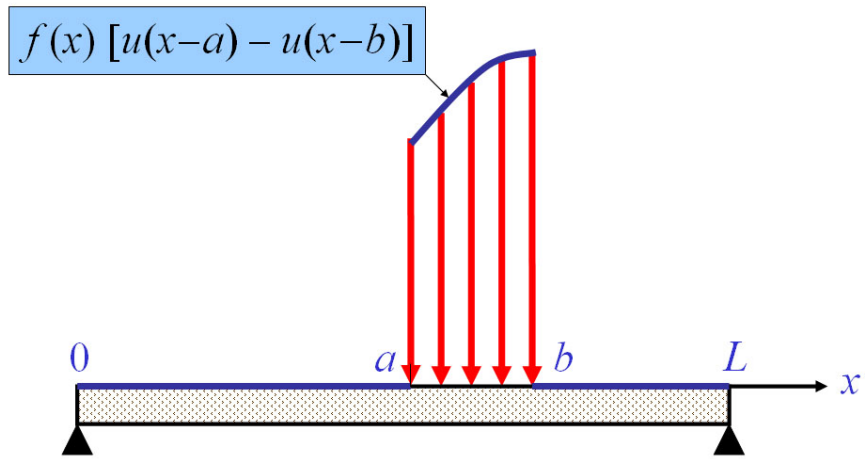


圖 9 以 $u(x-a)-u(x-b)$ 表示樑在 $[a,b]$ 範圍內受到 $f(x)$ 的外力