提要 170：*Leibnitz* 定則之應用

首先再說明一遍 *Leibnitz* 定則及其證明，然後於範例一解釋 *Leibnitz* 定則的應用方式。

Leibnitz 定則
已知 $I(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ ，則 $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+f[b(\alpha),\alpha]\frac{db(\alpha)}{d\alpha}-f[a(\alpha),\alpha]\frac{da(\alpha)}{d\alpha}$ 。

證明：

由定義知：

$$
\begin{aligned}
\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta\alpha} \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha} \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a(\alpha+\Delta\alpha)}^{b(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $a(\alpha+\Delta\alpha)=a+\Delta a=a(\alpha)+\Delta a(\alpha)$ 、 $b(\alpha+\Delta\alpha)=b+\Delta b=b(\alpha)+\Delta b(\alpha)$ ，故：

$$
\begin{aligned}
\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a(\alpha+\Delta\alpha)}^{b(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right\} \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right\} \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a+\Delta a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx+\int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right\}
\end{aligned}
$$

上式再同時加減一個極限運算 $\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx$ ，則：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a+\Delta a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx+\int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right.$$
$$\left.+\int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx\right\}$$

觀察積分之上下限發現，其中等號右邊之第一項與第四項可以合併爲一項，因爲：

$$\int_{a+\Delta a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx+\int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx=\int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx$$

因此：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx+\int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right.$$
$$\left.-\int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx\right\}$$

上式中之第一項與第三項可以合併成一項，亦即：

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right]&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx}{\Delta\alpha}\\&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\int_{a}^{b}\left[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\right]dx}{\Delta\alpha}\\&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_{a}^{b}\frac{1}{\Delta\alpha}\left[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\right]dx\\&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_{a}^{b}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx\\&=\int_{a}^{b}\left[\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\right]dx\\&=\int_{a}^{b}\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx\end{aligned}$$

故：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{a}^{b}\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx+\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx\right\}$$

由圖 1 得知，在 b 到 $b+\Delta b$ 的積分範圍內，因爲 $\Delta b \to 0$ ，故：

$$f(b,\alpha+\Delta\alpha) \approx f(b+\Delta b,\alpha+\Delta\alpha) \approx \text{常數}$$

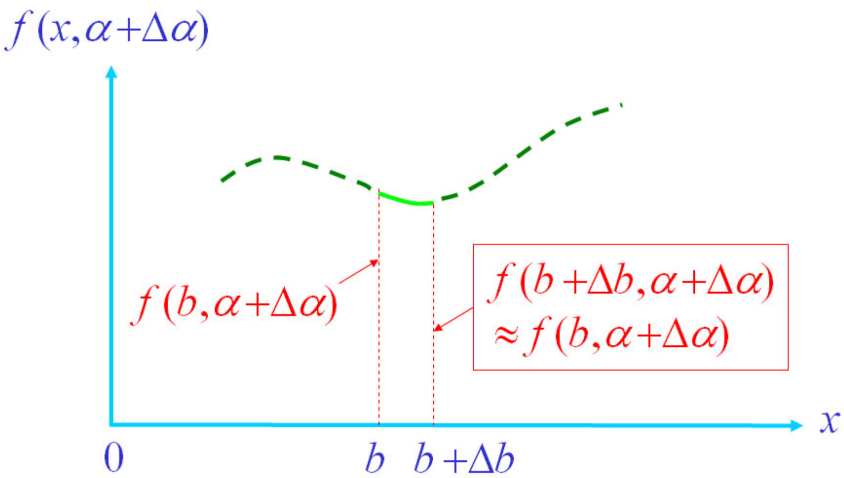

圖 1　在 b 到 $b+\Delta b$ 的積分範圍內， $f(b,\alpha+\Delta\alpha) \approx f(b+\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)$

因此：

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(b,\alpha+\Delta\alpha)\int_b^{b+\Delta b} dx \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(b,\alpha+\Delta\alpha)\Delta b \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0} f(b,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta b}{\Delta\alpha} \\
&= f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}
\end{aligned}$$

同理，在 a 到 $a+\Delta a$ 的積分範圍內，因爲 $\Delta a \to 0$ ，故：

$$f(a,\alpha+\Delta\alpha) \approx f(a+\Delta a,\alpha+\Delta\alpha) \approx \text{常數}$$

所以：

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\int_a^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(a,\alpha+\Delta\alpha)\int_a^{a+\Delta a} dx \\ &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(a,\alpha+\Delta\alpha)\Delta a \\ &= \lim_{\Delta\alpha\to 0} f(a,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha} \\ &= f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}\end{aligned}$$

因此，$dI(\alpha)/d\alpha$ 可進一步化簡爲：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}$$

故得證。

範例一
試證 $L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\}$。

證明：

令：

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

由 Leibnitz 定則知：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}$$

故：

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] \\ &= \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial t}d\tau + f(t)\frac{dt}{dt} - f(0)\frac{d0}{dt} \\ &= \int_0^t (0)d\tau + f(t)(1) - f(0)(0) \\ &= f(t)\end{aligned}$$

又已知 $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$，所以：

$$L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0)$$

將 $g(t)$ 與 $g'(t)$ 代入上式，可得：

$$L\{f(t)\}=sL\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}-g(0)$$

其中 $g(0)=\int_0^0 f(\tau)d\tau=0$ ，故：

$$L\{f(t)\}=sL\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$$

亦即：

$$\boxed{L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}L\{f(t)\}}$$

故得證。

【另證】

由迴積分定理知： $L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$ ，對照原題意，可得 $g(t-\tau)=1$ ，故 $G(s)=L\{g(t)\}=L\{1\}=\frac{1}{s}$ ；而 $F(s)=L\{f(t)\}$ 。因此：

$$\boxed{L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}L\{f(t)\}}$$

故得證。

範例二
試求：$L\left\{\int_0^t \sin\tau\, d\tau\right\}$。

解答：

由前面之說明得知：$L\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\}$。今 $f(\tau) = \sin\tau$，即 $f(t) = \sin t$。故

$$L\left\{\int_0^t \sin\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{\sin t\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t \sin\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}$$

所以問題之解為 $\boxed{L\left\{\int_0^t \sin\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s\left(s^2+1\right)}}$。

範例三
試求：$L\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}$。

解答：

由前面之說明得知：$L\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\}=\frac{1}{s}L\{f(t)\}$。今 $f(\tau)=\cos\tau$，即 $f(t)=\cos t$。故

$$L\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s}L\{\cos t\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s^2+1}$$

所以問題之解爲 $\boxed{L\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s^2+1}}$。

範例四
試求：$L\left\{\int_0^t \sinh\tau\, d\tau\right\}$。

解答：

由前面之說明得知：$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}L\{f(t)\}$。令 $f(\tau)=\sinh\tau$，即 $f(t)=\sinh t$。故

$$L\left\{\int_0^t \sinh\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s}L\{\sinh t\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t \sinh\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s}\frac{1}{s^2-1}$$

所以問題之解爲 $\boxed{L\left\{\int_0^t \sinh\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s\left(s^2-1\right)}}$。

範例五
試求：$L\left\{\int_0^t \cosh\tau\, d\tau\right\}$。

解答：

由前面之說明得知：$L\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\}$。今 $f(\tau) = \cosh\tau$，即 $f(t) = \cosh t$。故

$$L\left\{\int_0^t \cosh\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{\cosh t\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t \cosh\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2-1}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t \cosh\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^2-1}$$

所以問題之解爲 $\boxed{L\left\{\int_0^t \cosh\tau\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^2-1}}$。