提要 169：*Leibnitz* 定則之證明

Leibnitz 定則之應用有很多，是一個非常重要的定則，因其應用廣泛。印象中，筆者於 1984 年投考台大應力研究所時，就曾被考過 *Leibnitz* 定則的證明，以下說明 *Leibnitz* 定則。

Leibnitz 定則
已知 $I(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ ，則 $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+f[b(\alpha),\alpha]\frac{db(\alpha)}{d\alpha}-f[a(\alpha),\alpha]\frac{da(\alpha)}{d\alpha}$ 。

證明：

由定義知：

$$\begin{aligned}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}\\&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}\\&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a(\alpha+\Delta\alpha)}^{b(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right\}\end{aligned}$$

其中 $a(\alpha+\Delta\alpha)=a+\Delta a=a(\alpha)+\Delta a(\alpha)$ 、 $b(\alpha+\Delta\alpha)=b+\Delta b=b(\alpha)+\Delta b(\alpha)$ ，故：

$$\begin{aligned}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a(\alpha+\Delta\alpha)}^{b(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx\right\}\\&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right\}\\&=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a+\Delta a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx+\int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right\}\end{aligned}$$

上式再同時加減一個極限運算 $\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx$ ，則：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a+\Delta a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx \right.$$
$$\left. + \int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx \right\}$$

觀察積分之上下限發現，其中等號右邊之第一項與第四項可以合併爲一項，因爲：

$$\int_{a+\Delta a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = \int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx$$

因此：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx \right.$$
$$\left. - \int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx \right\}$$

上式中之第一項與第三項可以合併成一項，亦即：

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx\right] &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\int_{a}^{b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx}{\Delta\alpha} \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\int_{a}^{b}\left[f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)\right]dx}{\Delta\alpha} \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_{a}^{b}\frac{1}{\Delta\alpha}\left[f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)\right]dx \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_{a}^{b}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx \\
&= \int_{a}^{b}\left[\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\right]dx \\
&= \int_{a}^{b}\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx
\end{aligned}$$

故：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{a}^{b}\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx + \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx\right\}$$

由圖 1 得知，在 b 到 $b+\Delta b$ 的積分範圍內，因爲 $\Delta b \to 0$ ，故：

$$f(b,\alpha+\Delta\alpha) \approx f(b+\Delta b,\alpha+\Delta\alpha) \approx \text{常數}$$

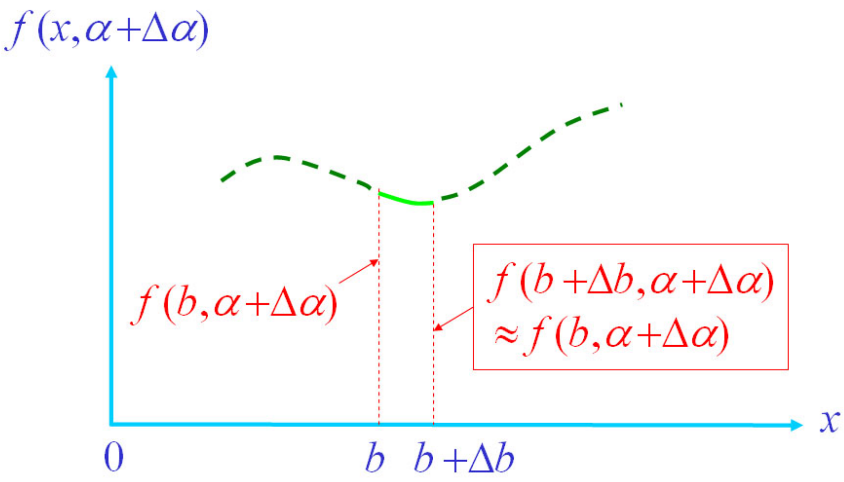

圖 1　在 b 到 $b+\Delta b$ 的積分範圍內， $f(b,\alpha+\Delta\alpha) \approx f(b+\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)$

因此：

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(b,\alpha+\Delta\alpha)\int_b^{b+\Delta b} dx \\ &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(b,\alpha+\Delta\alpha)\Delta b \\ &= \lim_{\Delta\alpha\to 0} f(b,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta b}{\Delta\alpha} \\ &= f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}\end{aligned}$$

同理，在 a 到 $a+\Delta a$ 的積分範圍內，因爲 $\Delta a \to 0$ ，故：

$$f(a,\alpha+\Delta\alpha) \approx f(a+\Delta a,\alpha+\Delta\alpha) \approx \text{常數}$$

所以：

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\int_a^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(a,\alpha+\Delta\alpha)\int_a^{a+\Delta a} dx$$

$$= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha} f(a,\alpha+\Delta\alpha)\Delta a$$

$$= \lim_{\Delta\alpha\to 0} f(a,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha}$$

$$= f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}$$

因此，$dI(\alpha)/d\alpha$ 可進一步化簡爲：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}$$

故得證。