提要 167：函數 $f(t)/t$ 之 *Laplace* 積分轉換

在討論函數 $f(t)/t$ 的 *Laplace* 積分轉換之前，請讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st} ，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，表示 $F(s)$ 與 $f(t)$ 有對應關係。符號 $F(s)$ 亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數 $f(t)/t$ 的 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 $f(t)/t$ 的 *Laplace* 積分轉換之過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，因此，函數 $f(t)/t$ 的 *Laplace* 積分轉換可表為：

$$
\begin{aligned}
L\{f(t)/t\} &= \int_0^\infty [f(t)/t]e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(t)\left[e^{-st}/t\right]dt
\end{aligned}
$$

其中 $e^{-st}/t=\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t}d\tilde{s}$，故：

$$
\begin{aligned}
L\{f(t)/t\} &= \int_0^\infty f(t)\left[e^{-st}/t\right]dt \\
&= \int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t}d\tilde{s}\right]dt \\
&= \int_0^\infty \left[f(t)\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t}d\tilde{s}\right]dt \\
&= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty f(t)e^{-\tilde{s}t}d\tilde{s}\right]dt \\
&= \int_0^\infty \int_s^\infty f(t)e^{-\tilde{s}t}d\tilde{s}\,dt \\
&= \int_s^\infty \int_0^\infty f(t)e^{-\tilde{s}t}dt\,d\tilde{s} \\
&= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty f(t)e^{-\tilde{s}t}dt\right]d\tilde{s}
\end{aligned}
$$

上式中之 $\int_0^\infty f(t)e^{-\tilde{s}t}dt$ 即為函數 $f(t)$ 作 *Laplace* 積分轉換之涵意，故：

$$
\int_0^\infty f(t)e^{-\tilde{s}t}dt = F(\tilde{s})
$$

因此，$f(t)/t$ 的 *Laplace* 積分轉換可化簡爲：

$$\boxed{L\{f(t)/t\}=\int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}}$$

這個關係式作者沒有意思要讓讀者背下來，但若是讀者不覺得麻煩，也背得下來的話，最好還是背下來。一般而言，與上式相關的考題非常稀少。摘要(一)是應背下來的 17 個 *Laplace* 轉換關係式，摘要(二)則不勉強讀者一定要背下來，目前已列出以下四個關係式：$L\{tf(t)\}=-F'(s)$、$L\{tf'(t)\}=-F(s)-sF'(s)$、$L\{tf''(t)\}=-2sF(s)-s^2F'(s)+f(0)$、$L\{f(t)/t\}=\int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}$。

範例二
試求：$L\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\}$。

解答：

因爲已知$L\{f(t)/t\}=\int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}$，所以考慮$f(t)=\sin t$：

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty L\{\sin t\}\Big|_{s\text{換爲}\tilde{s}}\,d\tilde{s}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty \left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Bigg|_{s\text{換爲}\tilde{s}}\,d\tilde{s}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty \frac{1}{\tilde{s}^2+1}\,d\tilde{s}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\tan^{-1}\tilde{s}\Big|_s^\infty$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}s$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$$

即問題之解爲$\boxed{L\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\}=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}s}$。

範例三

試求：$L\left\{\dfrac{\sin(2t)}{t}\right\}$。

解答：

因為已知$L\{f(t)/t\}=\int_s^{\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}$，所以考慮$f(t)=\sin(2t)$：

$$L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}L\{\sin(2t)\}\Big|_{s換為\tilde{s}}d\tilde{s}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}\Big|_{s換為\tilde{s}}d\tilde{s}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}\frac{2}{\tilde{s}^2+4}d\tilde{s}$$

令$\tilde{s}=2u$，則：

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\int_{\frac{s}{2}}^{\infty}\frac{2}{4u^2+4}d(2u)$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\int_{\frac{s}{2}}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}du$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\tan^{-1}u\Big|_{\frac{s}{2}}^{\infty}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}\frac{s}{2}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{2}$$

即問題之解為$\boxed{L\left\{\dfrac{\sin(2t)}{t}\right\}=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\dfrac{s}{2}}$。

摘要(一)：應背下來的 17 個 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

摘要(二)：行有餘力才去背誦的 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$tf'(t)$	$-F(s)-s\frac{dF(s)}{ds}$
$tf''(t)$	$-2sF(s)-s^2\frac{dF(s)}{ds}+f(0)$
$f(t)/t$	$\int_s^{\infty} F(\tilde{s})d\tilde{s}$