提要 166：函數 $tf''(t)$之 *Laplace* 積分轉換

在討論函數$tf''(t)$的 *Laplace* 積分轉換之前，請讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義為：「將 $f(t)$乘上一個指數衰減的函數e^{-st} ，然後對變數 t 作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數 t 作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$表示其積分後之結果，表示 $F(s)$與 $f(t)$有對應關係。符號 $F(s)$亦常表為 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義為：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表為 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數$tf''(t)$的 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 $tf''(t)$ 的 *Laplace* 積分轉換過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，因此，函數 $tf''(t)$ 的 *Laplace* 積分轉換可表為：

$$
\begin{aligned}
L\{tf''(t)\} &= \int_0^\infty tf''(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f''(t)\left\{-\frac{d\left(e^{-st}\right)}{ds}\right\}dt \\
&= \int_0^\infty f''(t)\left\{-\frac{d}{ds}\left[e^{-st}\right]\right\}dt \\
&= \int_0^\infty \left\{-\frac{d}{ds}\left[f''(t)e^{-st}\right]\right\}dt \\
&= -\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty \left[f''(t)e^{-st}\right]dt\right\}
\end{aligned}
$$

已知 $\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0) = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$，故：

$$
\begin{aligned}
L\{tf''(t)\} &= -\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty \left[f''(t)e^{-st}\right]dt\right\} \\
&= -\frac{d}{ds}\left\{s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right\} \\
&= -\frac{d\left[s^2F(s)\right]}{ds} + \frac{d\left[sf(0)\right]}{ds} + \frac{d\left[f'(0)\right]}{ds} \\
&= -\frac{d\left[s^2\right]}{ds}F(s) - s^2\frac{d\left[F(s)\right]}{ds} + f(0) + 0 \\
&= -2sF(s) - s^2\frac{dF(s)}{ds} + f(0) \\
&= -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)
\end{aligned}
$$

亦即：

$$\boxed{L\{tf''(t)\} = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)}$$

這個關係式作者沒有意思要讓讀者背下來，但若是讀者不覺得麻煩，也背得下來的話，最好還是背下來。一般而言，與上式相關的考題較少。摘要(一)是應背下來的 17 個 *Laplace* 轉換關係式，摘要(二)則不勉強讀者一定要背下來，目前僅列出以下三個結論：$L\{tf(t)\} = -F'(s)$、$L\{tf'(t)\} = -F(s) - sF'(s)$ 與 $L\{tf''(t)\} = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)$。

範例二
試求：(a) $L\left\{t\cos(3t)\right\}$ (b) $L\left\{t\sin(3t)\right\}$

解答：

(a) 因為已知 $L\left\{tf''(t)\right\}=-2sF(s)-s^2F'(s)+f(0)$，所以考慮 $f''(t)=\cos(3t)$，積分兩次後可得 $f(t)=-\frac{1}{9}\cos(3t)$，故 $L\left\{tf''(t)\right\}=-2sF(s)-s^2F'(s)+f(0)$ 可表為：

$$L\left\{t\cos(3t)\right\}=-2sL\left\{-\frac{1}{9}\cos(3t)\right\}-s^2\frac{d}{ds}L\left\{-\frac{1}{9}\cos(3t)\right\}+\left[-\frac{1}{9}\cos(0)\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=-2s\left[-\frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}\right]-s^2\frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}\right]-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{2}{9}\frac{s^2}{s^2+9}+\frac{s^2}{9}\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{2}{9}\frac{s^2}{s^2+9}+\frac{s^2}{9}\left[\frac{1}{s^2+9}-\frac{2s^2}{\left(s^2+9\right)^2}\right]-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{2}{9}\frac{s^2}{s^2+9}+\frac{s^2}{9}\left[\frac{s^2+9}{\left(s^2+9\right)^2}-\frac{2s^2}{\left(s^2+9\right)^2}\right]-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{2}{9}\frac{s^2}{s^2+9}+\frac{s^2}{9}\frac{-s^2+9}{\left(s^2+9\right)^2}-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{2}{9}\frac{s^2\left(s^2+9\right)}{\left(s^2+9\right)^2}+\frac{s^2}{9}\frac{-s^2+9}{\left(s^2+9\right)^2}-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{1}{9}\frac{2s^4+18s^2}{\left(s^2+9\right)^2}+\frac{1}{9}\frac{-s^4+9s^2}{\left(s^2+9\right)^2}-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{1}{9}\frac{s^4+27s^2}{\left(s^2+9\right)^2}-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{1}{9}\frac{s^4+27s^2-\left(s^2+9\right)^2}{\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow L\left\{t\cos(3t)\right\}=\frac{1}{9}\frac{s^4+27s^2-s^4-18s^2-81}{\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\cos\left(3t\right)\right\} = \frac{1}{9}\frac{9s^2-81}{\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\cos\left(3t\right)\right\} = \frac{1}{9}\frac{9\left(s^2-9\right)}{\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\cos\left(3t\right)\right\} = \frac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}$$

即問題(a)之解爲$\boxed{L\left\{t\cos\left(3t\right)\right\} = \frac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}}$。

(b) 因爲已知$L\left\{tf''\left(t\right)\right\} = -2sF\left(s\right) - s^2F'\left(s\right) + f\left(0\right)$，所以考慮$f''\left(t\right) = \sin\left(3t\right)$，積分兩次後可得$f\left(t\right) = -\frac{1}{9}\sin\left(3t\right)$，故$L\left\{tf''\left(t\right)\right\} = -2sF\left(s\right) - s^2F'\left(s\right) + f\left(0\right)$可表爲：

$$L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = -2sL\left\{-\frac{1}{9}\sin\left(3t\right)\right\} - s^2\frac{d}{ds}L\left\{-\frac{1}{9}\sin\left(3t\right)\right\} + \left[-\frac{1}{9}\sin\left(0\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = -2s\left[-\frac{1}{9}\frac{3}{s^2+9}\right] - s^2\frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{9}\frac{3}{s^2+9}\right]$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = \frac{2}{9}\frac{3s}{s^2+9} + \frac{s^2}{3}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = \frac{2}{9}\frac{3s}{s^2+9} + \frac{s^2}{3}\left[-\frac{2s}{\left(s^2+9\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = \frac{2s}{3\left(s^2+9\right)} - \frac{2s^3}{3\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = \frac{2s\left(s^2+9\right)}{3\left(s^2+9\right)^2} - \frac{2s^3}{3\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = \frac{2s\left(s^2+9\right) - 2s^3}{3\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = \frac{18s}{3\left(s^2+9\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\} = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}$$

即問題(b)之解爲$\boxed{L\left\{t\sin\left(3t\right)\right\}=\dfrac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}}$。

摘要(一)：應背下來的 17 個 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

摘要(二)：行有餘力才去背誦的 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
$tf(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
$tf'(t)$	$-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$
$tf''(t)$	$-2sF(s)-s^2\dfrac{dF(s)}{ds}+f(0)$