提要 165：函數 *tf'*(*t*)之 *Laplace* 積分轉換

在討論函數$tf'(t)$的 *Laplace* 積分轉換之前，請讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將$f(t)$乘上一個指數衰減的函數e^{-st}，然後對變數t作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數t作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數t會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數s有關。這是對函數$f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號$F(s)$表示其積分後之結果，表示$F(s)$與$f(t)$有對應關係。符號$F(s)$亦常表爲$L\{f(t)\}$，表函數$f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數s之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數$F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表爲$f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$或$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數$tf'(t)$的 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 $tf'(t)$ 的 *Laplace* 積分轉換過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 Laplace 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，因此，函數 $tf'(t)$ 的 Laplace 積分轉換可表爲：

$$\begin{aligned}
L\{tf'(t)\} &= \int_0^\infty tf'(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f'(t)\left\{-\frac{d\left(e^{-st}\right)}{ds}\right\}dt \\
&= \int_0^\infty f'(t)\left\{-\frac{d}{ds}\left[e^{-st}\right]\right\}dt \\
&= \int_0^\infty \left\{-\frac{d}{ds}\left[f'(t)e^{-st}\right]\right\}dt \\
&= -\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty \left[f'(t)e^{-st}\right]dt\right\}
\end{aligned}$$

已知 $\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\}-f(0) = sF(s)-f(0)$，故：

$$\begin{aligned}
L\{tf'(t)\} &= -\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty \left[f'(t)e^{-st}\right]dt\right\} \\
&= -\frac{d}{ds}\{sF(s)-f(0)\} \\
&= -\frac{d[sF(s)]}{ds}+\frac{df(0)}{ds} \\
&= -\frac{d[sF(s)]}{ds}+0 \\
&= -F(s)-s\frac{dF(s)}{ds} \\
&= -F(s)-sF'(s)
\end{aligned}$$

亦即：

$$\boxed{L\{tf'(t)\}=-F(s)-sF'(s)}$$

這個關係式作者沒有意思要讓讀者背下來，但若是讀者不覺得麻煩，也背得下來的話，最好還是背下來。一般而言，與上式相關的考題較少。摘要(一)是應背下來的 17 個 Laplace 轉換關係式，摘要(二)則不勉強讀者一定要背下來，目前僅列出$L\{tf(t)\}=-F'(s)$與$L\{tf'(t)\}=-F(s)-sF'(s)$的結論。

範例二

試求：(a) $L\left\{te^{3t}\right\}$ (b) $L\left\{t^2e^{3t}\right\}$

解答：

(a) 因為已知 $L\left\{tf'(t)\right\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以可考慮 $f'(t)=e^{3t}$，積分後之結果為 $f(t)=\dfrac{e^{3t}}{3}$。因此 $L\left\{tf'(t)\right\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$ 可改寫為：

$$L\left\{te^{3t}\right\}=-L\left\{\frac{e^{3t}}{3}\right\}-s\frac{d}{ds}L\left\{\frac{e^{3t}}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{1}{3(s-3)}-s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{3(s-3)}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{1}{3(s-3)}-s\left[-\frac{1}{3(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{1}{3(s-3)}+\frac{s}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{s-3}{3(s-3)^2}+\frac{s}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=\frac{-s+3+s}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=\frac{3}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=\frac{1}{(s-3)^2}$$

即問題(a)之解為 $\boxed{L\left\{te^{3t}\right\}=\dfrac{1}{(s-3)^2}}$。

(b) 因為已知$L\{tf'(t)\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以可考慮$f'(t)=te^{3t}$，積分後之結果為$f(t)=\dfrac{te^{3t}}{3}-\dfrac{e^{3t}}{9}$。因此$L\{tf'(t)\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$可改寫為：

$$L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-L\left\{\frac{te^{3t}}{3}-\frac{e^{3t}}{9}\right\}-s\frac{d}{ds}L\left\{\frac{te^{3t}}{3}-\frac{e^{3t}}{9}\right\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-L\left\{\frac{te^{3t}}{3}\right\}+L\left\{\frac{e^{3t}}{9}\right\}-s\frac{d}{ds}\left(L\left\{\frac{te^{3t}}{3}\right\}-L\left\{\frac{e^{3t}}{9}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-\frac{1}{3}L\left\{te^{3t}\right\}+\frac{1}{9}L\left\{e^{3t}\right\}-s\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3}L\left\{te^{3t}\right\}-\frac{1}{9}L\left\{e^{3t}\right\}\right)$$

由(a)知$L\left\{te^{3t}\right\}=\dfrac{1}{(s-3)^2}$，故上式可進一步改寫為：

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{s-3}-s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{s-3}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{1}{9}\frac{s-3}{(s-3)^2}-s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}-\frac{1}{9}\frac{s-3}{(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{-3+s-3}{(s-3)^2}-s\frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{9}\frac{-3+s-3}{(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\frac{d}{ds}\left[\frac{s-6}{(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\left[\frac{1}{(s-3)^2}-\frac{2(s-6)}{(s-3)^3}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\left[\frac{s-3}{(s-3)^3}-\frac{2(s-6)}{(s-3)^3}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\frac{s-3-2s+12}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\frac{-s+9}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{(s-6)(s-3)}{(s-3)^3}+\frac{s}{9}\frac{-s+9}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s^2-9s+18}{(s-3)^3}+\frac{s}{9}\frac{-s+9}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t^2 e^{3t}\right\} = \frac{1}{9}\frac{s^2 - 9s + 18 - s^2 + 9s}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t^2 e^{3t}\right\} = \frac{1}{9}\frac{18}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t^2 e^{3t}\right\} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

即問題(b)之解為$\boxed{L\left\{t^2 e^{3t}\right\} = \frac{2}{(s-3)^3}}$。

摘要(一)：應背下來的 17 個 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

摘要(二)：行有餘力才去背誦的 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
$tf(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
$tf'(t)$	$-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$