提要 164：函數 $tf(t)$之 *Laplace* 積分轉換

在討論函數$tf(t)$的 *Laplace* 積分轉換之前，請讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義為：「將$f(t)$乘上一個指數衰減的函數e^{-st}，然後對變數t作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數t作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數t會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數s有關。這是對函數$f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號$F(s)$表示其積分後之結果，表示$F(s)$與$f(t)$有對應關係。符號$F(s)$亦常表為$L\{f(t)\}$，表函數$f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義為：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數s之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數$F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表為$f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$或$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數$tf(t)$的 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數$tf(t)$的 *Laplace* 積分轉換。

解答：

由定義知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可表為$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，因此，函數$tf(t)$的 *Laplace* 積分轉換可表為：

$$\begin{aligned}
L\{tf(t)\} &= \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(t)\left\{-\frac{d\left(e^{-st}\right)}{ds}\right\}dt \\
&= \int_0^\infty f(t)\left\{-\frac{d}{ds}\left[e^{-st}\right]\right\}dt \\
&= \int_0^\infty \left\{-\frac{d}{ds}\left[f(t)e^{-st}\right]\right\}dt \\
&= -\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty \left[f(t)e^{-st}\right]dt\right\} \\
&= -\frac{d}{ds}\{F(s)\} \\
&= -\frac{d\{F(s)\}}{ds} \\
&= -\frac{dF(s)}{ds}
\end{aligned}$$

亦即：

$$\boxed{L\{tf(t)\}=-\frac{dF(s)}{ds}}$$

這個關係式作者沒有意思要讀者背下來，但若是讀者不覺得麻煩，也背得下來的話，還是背下來最好。一般而言，與上式相關的考題較少。摘要(一)是應背下來的 17 個 *Laplace* 轉換關係式，摘要(二)則不勉強讀者一定要背下來，目前僅列出$L\{tf(t)\}=-\dfrac{dF(s)}{ds}$的結論。

範例二

試求：(a) $L\{te^{3t}\}$ (b) $L\{t^2e^{3t}\}$

解答：

(a) 因爲已知 $L\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以

$$L\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}L\{e^{3t}\}$$

$$\Rightarrow\ L\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

$$\Rightarrow\ L\{te^{3t}\} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

即問題(a)之解爲 $\boxed{L\{te^{3t}\} = \dfrac{1}{(s-3)^2}}$。

(b) 因爲已知 $L\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以

$$L\{t^2e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}L\{te^{3t}\}$$

又由(a)知 $L\{te^{3t}\} = \dfrac{1}{(s-3)^2}$，故

$$\Rightarrow\ L\{t^2e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\{t^2e^{3t}\} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

即問題(b)之解爲 $\boxed{L\{t^2e^{3t}\} = \dfrac{2}{(s-3)^3}}$。

範例三
試求：(a) $L\{t\cos(3t)\}$ (b) $L\{t\sin(3t)\}$

解答：

(a) 因為已知 $L\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以

$$L\{t\cos(3t)\} = -\frac{d}{ds}L\{\cos(3t)\}$$

$$\Rightarrow L\{t\cos(3t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right)$$

$$\Rightarrow L\{t\cos(3t)\} = -\frac{1}{s^2+3^2} + \frac{2s^2}{\left(s^2+3^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow L\{t\cos(3t)\} = \frac{-s^2-3^2+2s^2}{\left(s^2+3^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow L\{t\cos(3t)\} = \frac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}$$

即問題(a)之解為 $\boxed{L\{t\cos(3t)\} = \dfrac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}}$。

(b) 因為已知 $L\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以

$$L\{t\sin(3t)\} = -\frac{d}{ds}L\{\sin(3t)\}$$

$$\Rightarrow L\{t\sin(3t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)$$

$$\Rightarrow L\{t\sin(3t)\} = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}$$

即問題(b)之解為 $\boxed{L\{t\sin(3t)\} = \dfrac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}}$。

摘要(一)：應背下來的 17 個 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

摘要(二)：行有餘力才去背誦的 *Laplace* 轉換關係式

$f(t)$	$F(s)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$