提要 163：迴積分定理(*Convolution Theorem*)

「迴積分定理」亦有譯爲「迴旋積分定理」者，其主要應用爲幫助 *Laplace* 積分反轉換之進行。在討論迴積分定理之前，請讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，表示 $F(s)$ 與 $f(t)$ 有對應關係。符號 $F(s)$ 亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明迴積分定理。

範例一

試說明迴積分定理：

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \text{或} \quad L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$$

的由來，其中 $F(s)=L\{f(t)\}$、 $G(s)=L\{g(t)\}$。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，因此：

$$\begin{aligned}
L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} &= \int_0^\infty\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\, e^{-st}\right]dt \\
&= \int_0^\infty\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}d\tau\right]dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\, d\tau\, dt \\
&= \int_{t=0}^{t=\infty}\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\, d\tau\, dt
\end{aligned}$$

上式所示之積分範圍，可以如圖 1 所示之圖形加以說明。

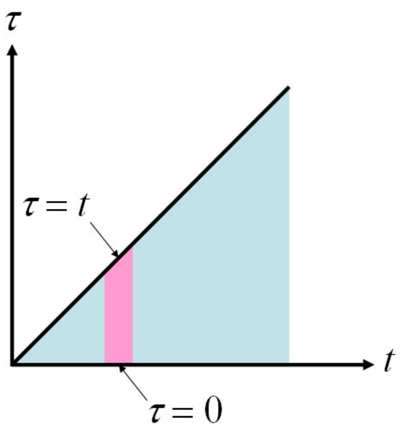

圖 1　雙重積分式 $\int_{t=0}^{t=\infty}\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\, d\tau\, dt$ 之積分範圍

如圖 1 所示雙重積分式 $\int_{t=0}^{t=\infty}\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\,d\tau\,dt$ 中之積分變數若對調，則其積分上下限應加以調整，其調整後之結果如圖 2 所示。

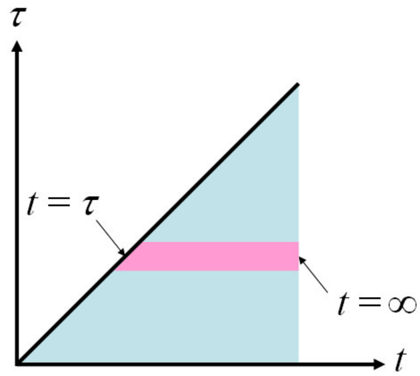

圖 2　雙重積分式 $\int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{t=\tau}^{t=\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\,dt\,d\tau$ 之積分範圍

基於此，$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 之 *Laplace* 積分轉換可改寫爲：

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=\int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{t=\tau}^{t=\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\,dt\,d\tau$$

再作適當之變數變換，令：

$$T=t-\tau$$

則 $t=T+\tau$ ；$dt=d(T+\tau)=dT+d\tau=dT+0=dT$ ；又當 $t=\tau$ 時，$T=0$ ；當 $t=\infty$ 時，$T=\infty-\tau=\infty$ 。故：

$$
\begin{aligned}
L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} &= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{T=0}^{T=\infty} f(\tau)g(T)e^{-s(T+\tau)}\,dT\,d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{T=0}^{T=\infty} f(\tau)g(T)e^{-sT}\,e^{-s\tau}\,dT\,d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\left[\int_{T=0}^{T=\infty} f(\tau)g(T)e^{-sT}\,e^{-s\tau}\,dT\right]d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\left[f(\tau)e^{-s\tau}\int_{T=0}^{T=\infty} g(T)e^{-sT}\,dT\right]d\tau \\
&= \left[\int_{T=0}^{T=\infty} g(T)e^{-sT}\,dT\right]\left[\int_{\tau=0}^{\tau=\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right] \\
&= G(s)F(s)
\end{aligned}
$$

亦即：

$$
\boxed{L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)}
$$

這是一個非常重要的定理，稱爲迴積分定理，這個關係式是應該背下來的。

範例二
試求：(a) $L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\}$ (b) $L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}$

解答：

(a) 因爲已知 $L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$，所以

$$L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\}=L\{e^t\}L\{\cos t\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s-1}\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\}=\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

即問題(a)之解爲 $\boxed{L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\}=\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}}$。

(b) 因爲已知 $L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$，所以

$$L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}=L\{e^t\}L\{\sin t\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

即問題(b)之解爲 $\boxed{L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}}$。

範例三
試求：(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-2)}\right\}$ (b) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+2)}\right\}$

解答：

(a) 因為已知$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right)_{t\text{換爲}\tau}\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}\right)_{t\text{換爲}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t(t)_{t\text{換爲}\tau}\left(e^{2t}\right)_{t\text{換爲}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{2(t-\tau)}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{2t}e^{-2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\int_0^t\tau e^{-2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\int_0^t\tau d\left(\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[\tau\left(\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right)-\int\frac{e^{-2\tau}}{-2}d\tau\right]_0^t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[-\frac{\tau e^{-2\tau}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2\tau}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{(0)e^{-2(0)}}{2}+\frac{1}{4}e^{-2(0)}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}$$

即問題(a)之解爲$\boxed{L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-2)}\right\}=-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}e^{2t}}$。

(b) 因為已知$L^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ ，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right)_{t\text{換為}\tau}\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\right)_{t\text{換為}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t(t)_{t\text{換為}\tau}\left(e^{-2t}\right)_{t\text{換為}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{-2t}e^{2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\int_0^t\tau e^{2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\int_0^t\tau d\left(\frac{e^{2\tau}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\tau\left(\frac{e^{2\tau}}{2}\right)-\int\frac{e^{2\tau}}{2}d\tau\right]_0^t$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\frac{\tau e^{2\tau}}{2}-\frac{1}{4}e^{2\tau}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\frac{te^{2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{(0)e^{2(0)}}{2}+\frac{1}{4}e^{2(0)}\right]$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\frac{te^{2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2t}$$

即問題(b)之解為$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2t}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$	$s>0$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$s>0$
$u(t-a)$	e^{-as}/s	$s>0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$s>0$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s-a>0$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$s>0$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法爲 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

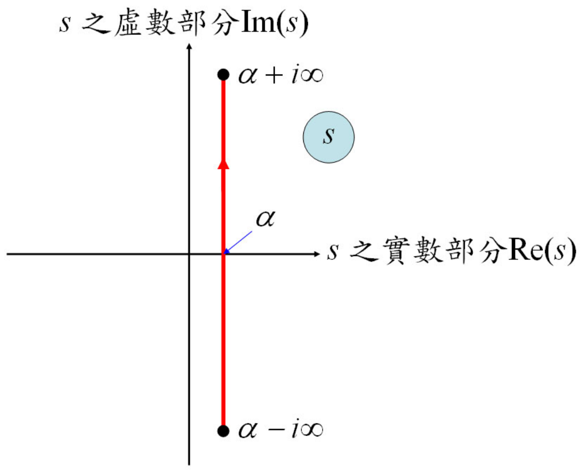

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，以下所示之**迴積分定理**是第 17 個要背下來的公式：

$$\boxed{L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)}$$