提要 162：函數 $f(t-a)u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換

首先請讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$表示其積分後之結果，表示 $F(s)$與 $f(t)$有對應關係。符號 $F(s)$亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$之 Laplace 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。函數 $f(t-a)u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換是一個定理，稱爲 *t*-平移（*t-Shifting*）定理，以下擬以範例說明函數 $f(t-a)u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 $f(t-a)u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，因此：

$$\begin{aligned}L\{f(t-a)u(t-a)\}&=\int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt\\&=\int_0^a f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt+\int_a^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt\end{aligned}$$

在積分區間$[0,a)$內，單位階梯函數之值為 0；在積分區間(a,∞)內，單位階梯函數之值為 1。故上式可化簡為：

$$
\begin{aligned}
L\{f(t-a)u(t-a)\} &= \int_0^a f(t-a)(0)e^{-st}dt + \int_a^\infty f(t-a)(1)e^{-st}dt \\
&= 0 + \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

上式需作適當之變數變換，以調整問題之上下限等。故令：

$$T = t - a$$

則當積分之下限$t = a$時，$T = 0$；當積分之上限$t = \infty$時，$T = \infty$。另外，$t = T + a$，而$dt = d(T+a) = dT + da = dT$。因此，函數$f(t-a)u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換可繼續改寫為：

$$
\begin{aligned}
L\{f(t-a)u(t-a)\} &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(T)e^{-s(T+a)}dT \\
&= \int_0^\infty f(T)e^{-as}e^{-sT}dT \\
&= e^{-as}\int_0^\infty f(T)e^{-sT}dT
\end{aligned}
$$

其中$\int_0^\infty f(T)e^{-sT}dT = \int_0^\infty f(\Omega)e^{-s\Omega}d\Omega \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = L\{f(t)\}$，所以：

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\int_0^\infty f(T)e^{-sT}dT = e^{-as}L\{f(t)\}$$

故函數$f(t-a)u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換為：

$$\boxed{L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}L\{f(t)\} = e^{-as}F(s)}$$

這也是一個很重要的定理，稱為 *t*-平移（*t-Shifting*）。這個關係式是應背下來的。

範例二
試求：(a) $L\{u(t-2)\cos(t-2)\}$ (b) $L\{u(t-1)\sin(t-1)\}$

解答：

(a) 因爲已知$L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$，所以

$$L\{u(t-2)\cos(t-2)\}=e^{-2s}L\{\cos t\}$$

$$\Rightarrow\ L\{u(t-2)\cos(t-2)\}=e^{-2s}\frac{s}{s^2+1}$$

即問題(a)之解爲$\boxed{L\{u(t-2)\cos(t-2)\}=\frac{se^{-2s}}{s^2+1}}$。

(b) 因爲已知$L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$，所以

$$L\{u(t-1)\sin(t-1)\}=e^{-s}L\{\sin t\}$$

$$\Rightarrow\ L\{u(t-1)\sin(t-1)\}=e^{-s}\frac{1}{s^2+1}$$

即問題(b)之解爲$\boxed{L\{u(t-1)\sin(t-1)\}=\frac{e^{-s}}{s^2+1}}$。

範例三
試求：(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2}\right\}$ (b) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}$

解答：

(a) 因為已知 $L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=f(t-a)u(t-a)$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\right\}=u(t-3)\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\Big|_{t\text{換成}t-3}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\right\}=u(t-3)\left(t\Big|_{t\text{換成}t-3}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\right\}=(t-3)u(t-3)$$

即問題(a)之解為 $\boxed{L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2}\right\}=(t-3)u(t-3)}$。

(b) 因為已知 $L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=f(t-a)u(t-a)$、$L^{-1}\left\{F(s-a)\right\}=e^{at}f(t)$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}=u(t-2)\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+9}\right\}\Big|_{t\text{換成}t-2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}=u(t-2)\left(e^tL^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}\Big|_{t\text{換成}t-2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}=u(t-2)\left(\frac{e^t}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}\Big|_{t\text{換成}t-2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}=u(t-2)\left(\frac{e^t}{3}\sin(3t)\Big|_{t\text{換成}t-2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}=u(t-2)\frac{e^{t-2}}{3}\sin\left[3(t-2)\right]$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}=\frac{e^{t-2}}{3}\sin\left[3(t-2)\right]u(t-2)$$

即問題(b)之解為$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)^2+9}\right\}=\frac{e^{t-2}}{3}\sin\left[3(t-2)\right]u(t-2)}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$	$s>0$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$s>0$
$u(t-a)$	e^{-as}/s	$s>0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$s>0$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s-a>0$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法爲 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

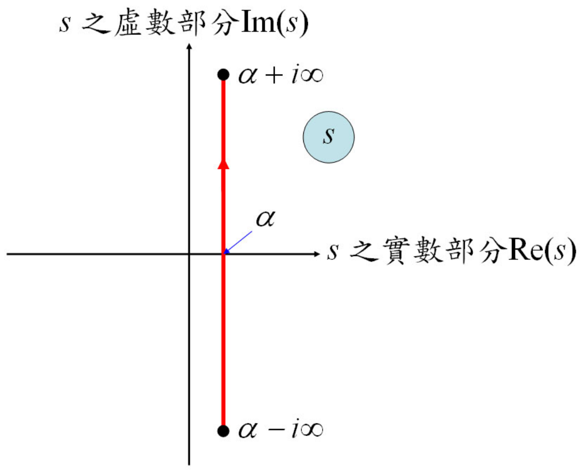

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，以下所示之 *t*-平移定理是第 16 個要背下來的公式：

$$\boxed{L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)}$$