提要 161：函數 $e^{at}f(t)$之 Laplace 積分轉換

首先讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$乘上一個指數衰減的函數 e^{-st} ，然後對變數 t 作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數 t 作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$表示其積分後之結果，表示 $F(s)$與 $f(t)$有對應關係。符號 $F(s)$亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ 。函數 $e^{at}f(t)$之 *Laplace* 積分轉換稱爲 *s*-平移（*s-Shifting*）定理，以下擬以範例說明函數 $e^{at}f(t)$之 Laplace 積分轉換。

範例一
試說明函數 $e^{at}f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，因此：

$$\int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

再作一個適當之變數變換，令：

$$S=s-a$$

因此， $e^{at}f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可改寫爲：

$$\int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-St}dt$$

上式等號右邊即呈 *Laplace* 積分轉換之型式，只是其積完分後之函數型態，是與新的符號 S 有關，故新的函數應表爲 $F(S)$ 。因爲 $S=s-a$ ，故又可表示爲 $F(s-a)$ 。故函數 $e^{at}f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換爲：

$$\boxed{\int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt=F(s-a)}$$

上式之意義爲先求出 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果，得出 $F(s)$ 的結果，然後再將其中之符號 s 改寫爲 $s-a$ ，變成 $F(s-a)$ 。這是一個重要的定理，稱爲 *s*-平移（*s-Shifting*）定理。這個關係式應背下來。

範例二

試求：(a) $L\left\{e^{2t}\sin(3t)\right\}$ (b) $L\left\{e^{-2t}t\right\}$

解答：

(a) 因為已知 $L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$，所以

$$L\left\{e^{2t}\sin(3t)\right\}=L\left\{\sin(3t)\right\}_{s換為s-2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{e^{2t}\sin(3t)\right\}=\left.\frac{3}{s^2+3^2}\right|_{s換為s-2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{e^{2t}\sin(3t)\right\}=\frac{3}{(s-2)^2+3^2}$$

即問題(a)之解為 $\boxed{L\left\{e^{2t}\sin(3t)\right\}=\frac{3}{(s-2)^2+9}}$。

(b) 因為已知 $L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$，所以

$$L\left\{e^{-2t}t\right\}=L\left\{t\right\}_{s換為s+2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{e^{-2t}t\right\}=\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s換為s+2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{e^{-2t}t\right\}=\frac{1}{(s+2)^2}$$

即問題(b)之解為 $\boxed{L\left\{e^{-2t}t\right\}=\frac{1}{(s+2)^2}}$。

範例三
試求：(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^2-4}\right\}$ (b) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^4}\right\}$

解答：

(a) 因為已知$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2-4}\right\}=e^{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2-4}\right\}=\frac{e^{t}}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-4}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2-4}\right\}=\frac{e^{t}}{2}\sinh(2t)$$

即問題(a)之解為$\boxed{L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^2-4}\right\}=\dfrac{e^{t}}{2}\sinh(2t)}$。

(b) 因為已知$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}=e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}=\frac{e^{2t}}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}=\frac{1}{6}e^{2t}t^3$$

即問題(b)之解為$\boxed{L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^4}\right\}=\dfrac{1}{6}e^{2t}t^3}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$	$s>0$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$s>0$
$u(t-a)$	e^{-as}/s	$s>0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$s>0$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s-a>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s-a>0$ 之更準確的條件寫法爲 $s-a$ 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s-a)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s-a)>0$ 的想法是可以實現的。

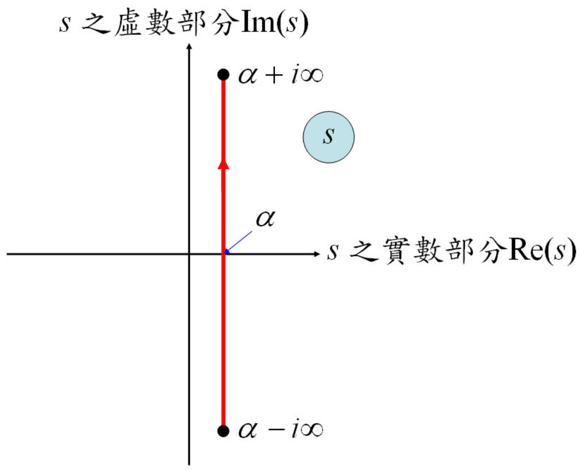

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，以下這個 *s*-平移（*s-Shifting*）定理是第 15 個要背下來的公式：

$$\boxed{\int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = F(s-a)}$$