提要 160：*Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換

首先解釋 *Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$之定義，其定義如下圖所示：

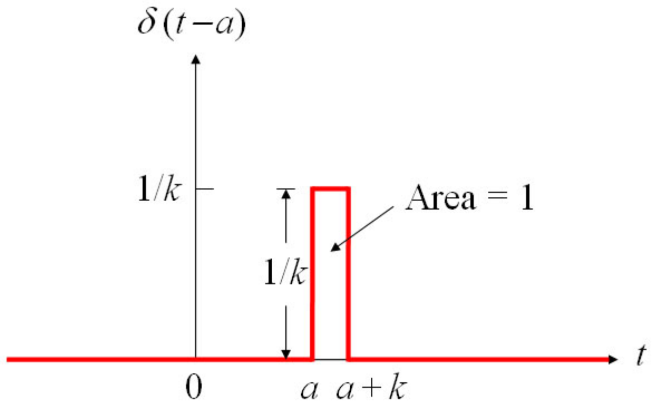

圖 1　*Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$之定義，其中$k \to 0$

亦即：

$$\delta(t-a)=\begin{cases}1/k, & if\ a \le t \le a+k \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

現在再來討論$\delta(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換。還是那句話，讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將$f(t)$乘上一個指數衰減的函數e^{-st}，然後對變數t作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數t作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數t會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數s有關。這是對函數$f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號$F(s)$表示其積分後之結果，表示$F(s)$與$f(t)$有對應關係。符號$F(s)$亦常表爲$L\{f(t)\}$，表函數$f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數s之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數$F(s)$之

Laplace 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數 $\delta(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明 *Dirac's delta* 函數 $\delta(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt=\int_0^a \delta(t-a)e^{-st}dt+\int_a^{a+k}\delta(t-a)e^{-st}dt+\int_{a+k}^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt$$

其中在積分區間 $[0,a)$ 及 $(a+k,\infty)$ 的範圍內，*Dirac's delta* 函數 $\delta(t-a)$ 之函數值爲 0；而在積分區間 $[a,a+k]$ 內，*Dirac's delta* 函數 $\delta(t-a)$ 之函數值爲 $1/k$。因此，上式可改寫爲：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt&=\int_0^a (0)e^{-st}dt+\lim_{k\to0}\int_a^{a+k}\frac{1}{k}e^{-st}dt+\int_{a+k}^\infty (0)e^{-st}dt\\&=0+\lim_{k\to0}\int_a^{a+k}\frac{1}{k}e^{-st}dt+0\\&=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\int_a^{a+k}e^{-st}dt\\&=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^{a+k}\\&=\lim_{k\to0}\left[-\frac{e^{-s(a+k)}-e^{-sa}}{ks}\right]\\&=\lim_{k\to0}\frac{e^{-sa}-e^{-s(a+k)}}{ks}\end{aligned}$$

當 $k\to0$ 時，上式爲 $0/0$ 之型式，故應引用 *L'Hospital* 定則，推求其極限值。基於此，分別對上式中之分子與分母中的符號 k 作微分，亦即：

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt &= \lim_{k\to 0}\frac{d\left[e^{-sa}-e^{-s(a+k)}\right]/dk}{d(ks)/dk} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{0-(-s)e^{-s(a+k)}}{s} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{se^{-s(a+k)}}{s} \\
&= \lim_{k\to 0} e^{-s(a+k)} \\
&= e^{-as}
\end{aligned}
$$

故 *Dirac's delta* 函數 $\delta(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換爲：

$$
\boxed{\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt = e^{-as}}
$$

這個關係式應背下來。

範例二
試說明函數$5\delta(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可表為$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，亦即：

$$\int_0^\infty 5\delta(t-a)e^{-st}dt=\int_0^a 5\delta(t-a)e^{-st}dt+\int_a^{a+k}5\delta(t-a)e^{-st}dt+\int_{a+k}^\infty 5\delta(t-a)e^{-st}dt$$

其中在積分區間$[0,a)$及$(a+k,\infty)$的範圍內，*Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$之函數值為0；而在積分區間$[a,a+k]$內，*Dirac's delta* 函數$\delta(t-a)$之函數值為$1/k$。因此，上式可改寫為：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty 5\delta(t-a)e^{-st}dt&=5\int_0^a(0)e^{-st}dt+\lim_{k\to0}5\int_a^{a+k}\frac{1}{k}e^{-st}dt+\int_{a+k}^\infty(0)e^{-st}dt\\&=0+\lim_{k\to0}5\int_a^{a+k}\frac{1}{k}e^{-st}dt+0\\&=\lim_{k\to0}\frac{5}{k}\int_a^{a+k}e^{-st}dt\\&=\lim_{k\to0}\frac{5}{k}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^{a+k}\\&=5\lim_{k\to0}\left[-\frac{e^{-s(a+k)}-e^{-sa}}{ks}\right]\\&=5\lim_{k\to0}\frac{e^{-sa}-e^{-s(a+k)}}{ks}\end{aligned}$$

當$k\to0$時，上式為$0/0$之型式，故應引用 *L'Hospital* 定則，推求其極限值。基於此，分別對上式中之分子與分母中的符號k作微分，亦即：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty 5\delta(t-a)e^{-st}dt &= 5\lim_{k\to 0}\frac{d\left[e^{-sa}-e^{-s(a+k)}\right]/dk}{d(ks)/dk}\\ &= 5\lim_{k\to 0}\frac{0-(-s)e^{-s(a+k)}}{s}\\ &= 5\lim_{k\to 0}\frac{se^{-s(a+k)}}{s}\\ &= 5\lim_{k\to 0}e^{-s(a+k)}\\ &= 5e^{-as}\end{aligned}$$

故函數 $5\delta(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換為：

$$\boxed{\int_0^\infty 5\delta(t-a)e^{-st}dt = 5e^{-as}}$$

【另解】

因為已知 $L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$ ，所以 $L\{5\delta(t-a)\} = 5L\{\delta(t-a)\} = 5e^{-as}$ ，即 $\boxed{L\{5\delta(t-a)\} = 5e^{-as}}$。

範例三
試求：(a) $L\left\{3\delta\left(t-1\right)-2\delta\left(t-3\right)\right\}$ (b) $L^{-1}\left\{4e^{-2s}+7e^{-4s}\right\}$

解答：

(a) 因為已知$L\left\{\delta\left(t-a\right)\right\}=e^{-as}$，所以

$$L\left\{3\delta\left(t-1\right)-2\delta\left(t-3\right)\right\}=3L\left\{\delta\left(t-1\right)\right\}-2L\left\{\delta\left(t-3\right)\right\}=3e^{-s}-2e^{-3s}$$

即問題(a)之解為$\boxed{3e^{-s}-2e^{-3s}}$。

(b) 因為已知$L^{-1}\left\{e^{-as}\right\}=\delta\left(t-a\right)$，所以

$$L^{-1}\left\{4e^{-2s}+7e^{-4s}\right\}=4L^{-1}\left\{e^{-2s}\right\}+7L^{-1}\left\{e^{-4s}\right\}=4\delta\left(t-2\right)+7\delta\left(t-4\right)$$

即問題(b)之解為$\boxed{4\delta\left(t-2\right)+7\delta\left(t-4\right)}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$	$s>0$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$s>0$
$u(t-a)$	e^{-as}/s	$s>0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法爲 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

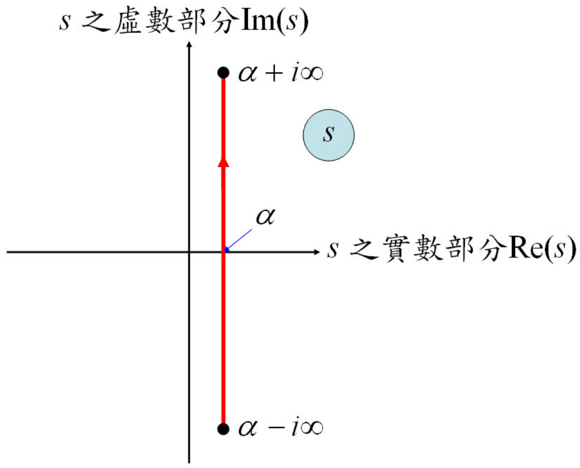

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，以下是第 14 個要背下來的公式：

$$\boxed{\int_0^{\infty}\delta(t-a)e^{-st}dt=e^{-as}}$$