提要 159：單位階梯函數 $u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換

首先解釋單位階梯函數(*Unit Step Function*; *Heaviside Function*)$u(t-a)$之定義，其定義如下圖所示：

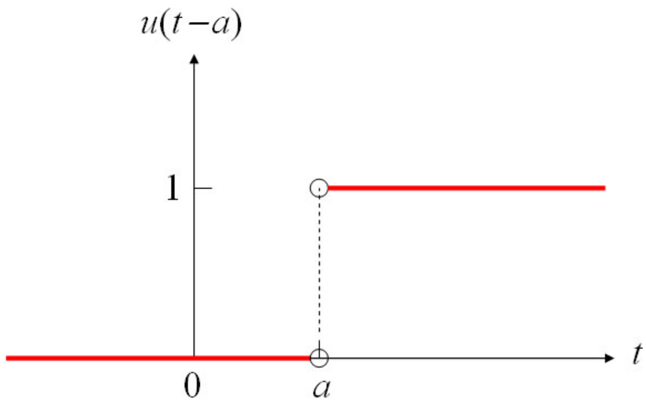

圖 1　單位階梯函數$u(t-a)$之定義

亦即：

$$u(t-a)=\begin{cases}0, & for\ t<a\\ 1, & for\ t>a\end{cases}$$

現在再來討論$u(t-a)$之 *Laplace* 積分轉換。還是那句話，讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將$f(t)$乘上一個指數衰減的函數e^{-st}，然後對變數t作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數t作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數t會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數s有關。這是對函數$f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號$F(s)$表示其積分後之結果，表示$F(s)$與$f(t)$有對應關係。符號$F(s)$亦常表爲$L\{f(t)\}$，表函數$f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數s之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數$F(s)$之

Laplace 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數 $u(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明單位階梯函數 $u(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\int_0^{\infty}u(t-a)e^{-st}dt=\int_0^{a}u(t-a)e^{-st}dt+\int_a^{\infty}u(t-a)e^{-st}dt$$

因爲在積分區間 $[0,a)$ 的範圍內，單位階梯函數 $u(t-a)$ 之函數值爲 0；而在積分區間 (a,∞) 的範圍內，單位階梯函數 $u(t-a)$ 之函數值爲 1。故上式可改寫爲：

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}u(t-a)e^{-st}dt&=\int_0^{a}(0)e^{-st}dt+\int_a^{\infty}(1)e^{-st}dt\\&=0+\int_a^{\infty}e^{-st}dt\\&=\int_a^{\infty}e^{-st}dt\\&=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^{\infty}\\&=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]-\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=a}\end{aligned}$$

其中，當 $s>0$ 時，$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]=0$；又 $\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=a}=-\frac{e^{-as}}{s}$。故單位階梯函數 $u(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換爲：

$$\boxed{\int_0^{\infty}u(t-a)e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s}}$$

這個關係式應背下來。

範例二
試說明函數 $5u(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\int_0^\infty 5u(t-a)e^{-st}dt=\int_0^a 5u(t-a)e^{-st}dt+\int_a^\infty 5u(t-a)e^{-st}dt$$

因爲在積分區間 $[0,a)$ 的範圍內，單位階梯函數 $u(t-a)$ 之函數值爲 0；而在積分區間 (a,∞) 的範圍內，單位階梯函數 $u(t-a)$ 之函數值爲 1。故上式可改寫爲：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty 5u(t-a)e^{-st}dt&=5\left[\int_0^a (0)e^{-st}dt+\int_a^\infty (1)e^{-st}dt\right]\\&=5\left[0+\int_a^\infty e^{-st}dt\right]\\&=5\int_a^\infty e^{-st}dt\\&=5\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^\infty\\&=5\left\{\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]-\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=a}\right\}\end{aligned}$$

其中，當 $s>0$ 時，$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]=0$；又 $\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=a}=-\frac{e^{-as}}{s}$。故函數 $5u(t-a)$ 之 *Laplace* 積分轉換爲：

$$\boxed{\int_0^\infty 5u(t-a)e^{-st}dt=\frac{5e^{-as}}{s}}$$

【另解】

因爲已知 $L\{u(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s}$ ，所以 $L\{5u(t-a)\}=5L\{u(t-a)\}=\frac{5e^{-as}}{s}$ ，即 $\boxed{L\{5u(t-a)\}=\frac{5e^{-as}}{s}}$。

範例三

試解析：(a) $L\{u(t-5)\}$ (b) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s}\right\}$。

解答：

(a) 已知 $L\{u(t-a)\}=\dfrac{e^{-as}}{s}$，所以 $\boxed{L\{u(t-5)\}=\dfrac{e^{-5s}}{s}}$。

(b) 已知 $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-as}}{s}\right\}=u(t-a)$，所以 $\boxed{L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s}\right\}=u(t-3)}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$	$s>0$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$s>0$
$u(t-a)$	e^{-as}/s	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法爲 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

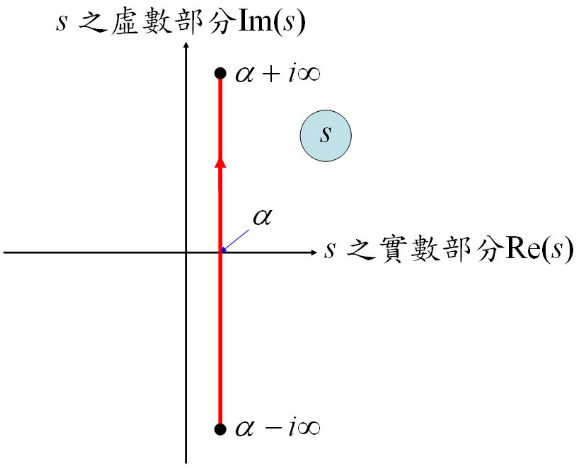

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，以下是第 13 個要背下來的公式：

$$\boxed{\int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{s}}$$