提要 158：函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換

還是那句話，讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以一範例說明函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty e^{-st}\, d\left[f^{(n-1)}(t)\right] \\
&= \left[e^{-st}f^{(n-1)}(t)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty f^{(n-1)}(t)d\left(e^{-st}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f^{(n-1)}(t)\right] - \left[e^{-st}f^{(n-1)}(t)\right]_{t=0} - \int_0^\infty f^{(n-1)}(t)\left(-se^{-st}dt\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{f^{(n-1)}(t)}{e^{st}}\right] - \left[e^{-s(0)}f^{(n-1)}(0)\right] + s\int_0^\infty f^{(n-1)}(t)e^{-st}dt
\end{aligned}$$

因爲 $f^{(n-1)}(\infty)$ 爲有限值，又當 $s>0$ 時，$e^{s(\infty)}\to\infty$ ，故 $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f^{(n-1)}(t)}{e^{st}}\right]$。基於此，上式可改寫爲：

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f^{(n-1)}(t)e^{-st}dt - f^{(n-1)}(0) = sL\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} - f^{(n-1)}(0)$$

同理 $\int_0^\infty f^{(n-1)}(t)e^{-st}dt = sL\left\{f^{(n-2)}(t)\right\} - f^{(n-2)}(0)$ ，故：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt &= sL\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} - f^{(n-1)}(0) \\
&= s\left[sL\left\{f^{(n-2)}(t)\right\} - f^{(n-2)}(0)\right] - f^{(n-1)}(0) \\
&= s^2L\left\{f^{(n-2)}(t)\right\} - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

其中 $L\left\{f^{(n-2)}(t)\right\} = sL\left\{f^{(n-3)}(t)\right\} - f^{(n-3)}(0)$ ，故：

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt = s^2L\{f^{(n-2)}(t)\} - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^2\left[sL\{f^{(n-3)}(t)\} - f^{(n-3)}(0)\right] - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^3L\{f^{(n-3)}(t)\} - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

依此原則，可繼續以下之推導：

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt$$
$$= s^3L\{f^{(n-3)}(t)\} - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^3\left[sL\{f^{(n-4)}(t)\} - f^{(n-4)}(0)\right] - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^4L\{f^{(n-4)}(t)\} - s^3f^{(n-4)}(0) - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - s^3f^{(n-4)}(0) - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

因此 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$\boxed{L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - s^3f^{(n-4)}(0) - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

附註：

1. $\boxed{L\{f'''(t)\} = s^3L\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)}$

2. $\boxed{L\{f^{(4)}(t)\} = s^4L\{f(t)\} - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)}$

3. $\boxed{L\{f^{(5)}(t)\} = s^5L\{f(t)\} - s^4f(0) - s^3f'(0) - s^2f''(0) - sf'''(0) - f''''(0)}$

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$	$s>0$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots$ $-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法爲 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

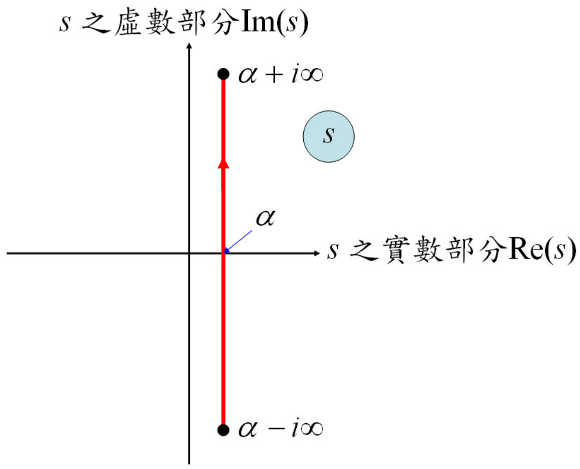

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，以下是第 12 個要背下來的公式：

$$\boxed{L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^{n}L\left\{f(t)\right\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-s^{3}f^{(n-4)}(0)-s^{2}f^{(n-3)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)}$$