提要 157：函數 *f"*(*t*)之 *Laplace* 積分轉換

還是那句話，讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty e^{-st}\, d[f'(t)] \\
&= \left[e^{-st}f'(t)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty f'(t)d\left(e^{-st}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f'(t)\right] - \left[e^{-st}f'(t)\right]_{t=0} - \int_0^\infty f'(t)\left(-se^{-st}dt\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{f'(t)}{e^{st}}\right] - \left[e^{-s(0)}f'(0)\right] + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt
\end{aligned}$$

因為 $f'(\infty)$ 為有限值，又當 $s>0$ 時， $e^{s(\infty)}\to\infty$ ，故 $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f'(t)}{e^{st}}\right]\to 0$ 。基於此，上式可改寫為：

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt - f'(0) = sL\{f'(t)\} - f'(0)$$

已知 $\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sL\{f(t)\} - f(0)$ ，故：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt &= s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt - f'(0) \\
&= s\left[s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

因此 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$\boxed{\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0)}$$

範例二
試求函數 $t\cos(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0)$$

即

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = t\cos(at)$$

則

$$f'(t) = \cos(at) - at\sin(at)$$
$$f''(t) = -2a\sin(at) - a^2 t\cos(at)$$

且 $f(0) = (0)\cos(0) = 0$ ， $f'(0) = \cos(0) - a(0)\sin(0) = 1$ ，代回式(1)：

$$L\{-2a\sin(at) - a^2 t\cos(at)\} = s^2 L\{t\cos(at)\} - s(0) - 1$$
$$\Rightarrow\ -2aL\{\sin(at)\} - a^2 L\{t\cos(at)\} = s^2 L\{t\cos(at)\} - 1$$
$$\Rightarrow\ -2aL\{\sin(at)\} + 1 = (s^2 + a^2) L\{t\cos(at)\}$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2) L\{t\cos(at)\} = -2a\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) + 1$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2) L\{t\cos(at)\} = -\frac{2a^2}{s^2 + a^2} + 1$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2) L\{t\cos(at)\} = \frac{-2a^2 + s^2 + a^2}{s^2 + a^2}$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2) L\{t\cos(at)\} = \frac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}$$
$$\Rightarrow\ L\{t\cos(at)\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

故函數$t\cos(at)$之 *Laplace* 積分轉換結果爲$\boxed{L\{t\cos(at)\}=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}}$。

範例三
試求函數$t\sin(at)$之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt=s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-sf(0)-f'(0)$$

即

$$L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t)=t\sin(at)$$

則

$$\begin{aligned} f'(t)&=\sin(at)+at\cos(at)\\ f''(t)&=2a\cos(at)-a^2t\sin(at)\end{aligned}$$

且$f(0)=(0)\sin(0)=0$，$f'(0)=\sin(0)+a(0)\cos(0)=0$，代回式(1)：

$$\begin{aligned} &L\{2a\cos(at)-a^2t\sin(at)\}=s^2L\{t\sin(at)\}-s(0)-0\\ \Rightarrow\ &2aL\{\cos(at)\}-a^2L\{t\sin(at)\}=s^2L\{t\sin(at)\}\\ \Rightarrow\ &2aL\{\cos(at)\}=(s^2+a^2)L\{t\sin(at)\}\\ \Rightarrow\ &(s^2+a^2)L\{t\sin(at)\}=2a\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t\sin\left(at\right)\right\} = \frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

故函數$t\sin\left(at\right)$之 *Laplace* 積分轉換結果爲$\boxed{L\left\{t\sin\left(at\right)\right\} = \frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

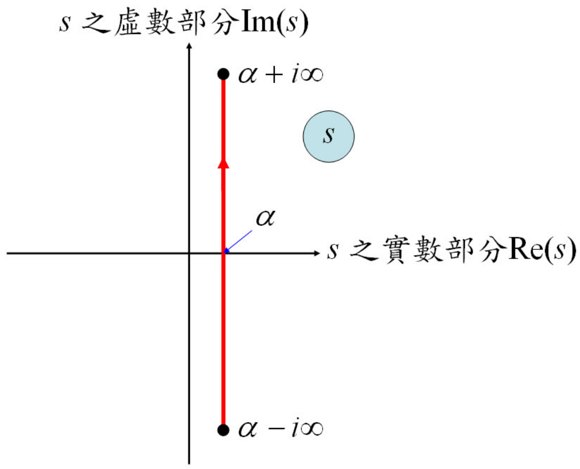

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ 是第 11 個要背下來的公式。