提要 156：函數 *f'*(*t*)之 *Laplace* 積分轉換

讀者務必記住 *Laplace* 積分轉換的定義。函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$乘上一個指數衰減的函數 e^{-st} ，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 會完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$加工後所得出之結果，故通常以符號 $F(s)$表示其積分後之結果，符號 $F(s)$亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$之 Laplace 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面相關單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。以下擬以範例說明函數 $f'(t)$之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 $f'(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty e^{-st}\,d[f(t)] \\ &= \left[e^{-st}f(t)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty f(t)d\left(e^{-st}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right] - \left[e^{-st}f(t)\right]_{t=0} - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}dt\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{f(t)}{e^{st}}\right] - \left[e^{-s(0)}f(0)\right] + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

因爲 $f(\infty)$ 爲有限值，又當 $s>0$ 時，$e^{s(\infty)}\to\infty$ ，故 $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f(t)}{e^{st}}\right]\to 0$ 。基於此，上式可改寫爲：

$$\boxed{\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)}$$

上式即爲 $f'(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果。

範例二
試求函數 $\sin^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)$$

即

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = \sin^2 t$$

則 $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$ ，且 $f(0) = \sin^2 0 = 0$ ，代回式(1)：

$$L\{2\sin t\cos t\} = sL\{\sin^2 t\} - \sin^2 0$$

$$\Rightarrow \quad L\{\sin 2t\} = sL\{\sin^2 t\} - 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{s^2+2^2} = sL\{\sin^2 t\}$$

$$\Rightarrow \quad L\{\sin^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

故函數 $\sin^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果為 $\boxed{L\{\sin^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}}$。

範例三

試求函數 $\cos^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)$$

即

$$L\left\{f'(t)\right\} = sL\left\{f(t)\right\} - f(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = \cos^2 t$$

則 $f'(t) = -2\sin t\cos t = -\sin 2t$ ，且 $f(0) = \cos^2 0 = 1$ ，代回式(1)：

$$\begin{aligned}
& L\{-2\sin t\cos t\} = sL\left\{\cos^2 t\right\} - \cos^2 0 \\
\Rightarrow\ & -L\{\sin 2t\} = sL\left\{\cos^2 t\right\} - 1 \\
\Rightarrow\ & -\frac{2}{s^2+2^2} + 1 = sL\left\{\cos^2 t\right\} \\
\Rightarrow\ & sL\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{-2+s^2+4}{s^2+4} \\
\Rightarrow\ & sL\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{s^2+2}{s^2+4} \\
\Rightarrow\ & L\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{2\left(s^2+2\right)}{s\left(s^2+4\right)}
\end{aligned}$$

故函數 $\cos^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果為 $\boxed{L\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{2\left(s^2+2\right)}{s\left(s^2+4\right)}}$ 。

範例四
試求函數 $\sinh^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)$$

即

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = \sinh^2 t$$

則

$$f'(t) = 2\sinh t\cosh t = 2\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \sinh(2t)$$

且 $f(0) = \sinh^2 0 = 0$，代回式(1)：

$$L\{2\sinh t\cosh t\} = sL\{\sinh^2 t\} - \sinh^2 0$$
$$\Rightarrow \quad L\{\sinh 2t\} = sL\{\sinh^2 t\} - 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{s^2 - 2^2} = sL\{\sinh^2 t\}$$
$$\Rightarrow \quad L\{\sinh^2 t\} = \frac{2}{s(s^2 - 4)}$$

故函數 $\sinh^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果爲 $\boxed{L\{\sinh^2 t\} = \dfrac{2}{s(s^2-4)}}$。

範例五
試求函數 $\cosh^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)$$

即

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = \cosh^2 t$$

則

$$f'(t) = 2\cosh t \sinh t = 2\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \sinh(2t)$$

且 $f(0) = \cosh^2 0 = 1$，代回式(1)：

$$L\{2\sinh t \cosh t\} = sL\{\cosh^2 t\} - \cosh^2 0$$

$$\Rightarrow L\{\sinh 2t\} = sL\{\cosh^2 t\} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{s^2 - 2^2} + 1 = sL\{\cosh^2 t\}$$

$$\Rightarrow sL\{\cosh^2 t\} = \frac{s^2 - 2}{s^2 - 4}$$

$$\Rightarrow L\{\cosh^2 t\} = \frac{s^2 - 2}{s(s^2 - 4)}$$

故函數 $\cosh^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果爲 $\boxed{L\{\cosh^2 t\} = \dfrac{s^2 - 2}{s(s^2 - 4)}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$s>0$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法爲 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

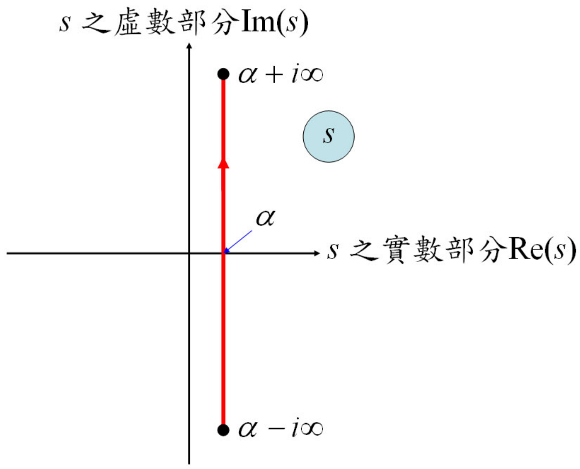

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$是第 10 個要背下來的公式。