

提要 155：函數 $\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換

讀者一定要記得 *Laplace* 積分轉換之定義。函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st} ，然後對變數 t 作 $[0, \infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0, \infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表為 $L\{f(t)\}$ ，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為：

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表為 $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st} ds$ 或 $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ 。今擬以範例說明函數 $\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一

試說明函數 $\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \sin(at)e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} \sin(at) d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
 &= \left[\sin(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) d \sin(at) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sin(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right] - \left[\sin(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0} + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-st}}{s}\right) (a \cos at dt) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\sin(at)}{se^{st}} \right] - \left[\sin(0) \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right) \right] + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt \\
 &= 0 - 0 + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt \\
 &= \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \cos(at)e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} \cos(at) d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
 &= \left[\cos(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) d \cos(at) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\cos(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right] - \left[\cos(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0} + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-st}}{s}\right) (-a \sin at dt) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\cos(at)}{se^{st}} \right] - \left[\cos(0) \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right) \right] - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt \\
 &= 0 + \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt
 \end{aligned}$$

基於此，函數 $\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為：

$$\int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt = \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt = \frac{a}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt \right)$$

同類項合併後，可得：

$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right) \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt = \frac{a}{s^2}$$

故 $\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$\int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

範例二

試說明函數 $5 \sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} 5 \sin(at) e^{-st} dt &= 5 \int_0^{\infty} \sin(at) d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\ &= 5 \left\{ \left[\sin(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) d \sin(at) \right\} \\ &= 5 \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sin(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right] - \left[\sin(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0} + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-st}}{s}\right) (a \cos at dt) \right\} \\ &= 5 \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\sin(at)}{se^{st}} \right] - \left[\sin(0) \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right) \right] + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt \right\} \\ &= 5 \left\{ 0 - 0 + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt \right\} \\ &= \frac{5a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \cos(at) e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} \cos(at) d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\ &= \left[\cos(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) d \cos(at) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\cos(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right] - \left[\cos(at) \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_{t=0} + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-st}}{s}\right) (-a \sin at dt) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\cos(at)}{se^{st}} \right] - \left[\cos(0) \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right) \right] - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt\end{aligned}$$

基於此，函數 $5\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為：

$$\int_0^{\infty} 5\sin at e^{-st} dt = \frac{5a}{s} \int_0^{\infty} \cos at e^{-st} dt = \frac{5a}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt \right)$$

同類項合併後，可得：

$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right) \int_0^{\infty} 5\sin at e^{-st} dt = \frac{5a}{s^2}$$

故 $5\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$\int_0^{\infty} 5\sin at e^{-st} dt = \frac{5a}{s^2 + a^2}$$

【另解】

因為已知 $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ ，所以 $L\{5\sin(at)\} = 5L\{\sin(at)\} = \frac{5a}{s^2 + a^2}$ ，即

$$L\{5\sin(at)\} = \frac{5a}{s^2 + a^2}。$$

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s > 0$
t	$1/s^2$	$s > 0$
t^2	$2/s^3$	$s > 0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s > 0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s > a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2 - a^2)$	$s - a > 0$ 且 $s + a > 0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2 - a^2)$	$s - a > 0$ 且 $s + a > 0$
$\cos(at)$	$s/(s^2 + a^2)$	$s > 0$
$\sin(at)$	$a/(s^2 + a^2)$	$s > 0$

註：

- ① 因 s 是一個複數，所以 $s > 0$ 之更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於零，即 $\text{Re}(s) > 0$ 。
- ② s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\text{Re}(s) > 0$ 的想法是可以實現的。

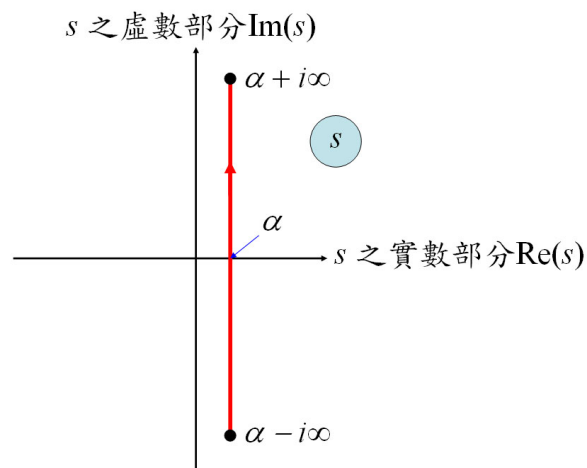


圖 1 在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

- ③ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來， $L\{\cos(at)\} = s/(s^2 + a^2)$ 是第九個要背下來的公式。