提要 154：函數 cos(*at*)之 *Laplace* 積分轉換

讀者一定要記得 *Laplace* 積分轉換之定義。函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。今擬以範例說明函數 $\cos(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數$\cos(at)$之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可表爲$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \cos(at)d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= \left[\cos(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)d\cos(at) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\cos(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right] - \left[\cos(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0} + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{s}\right)(-a\sin atdt) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos(at)}{se^{st}}\right] - \left[\cos(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right] - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

其中若 $s>0$，則$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos(at)}{se^{st}}\right]=0$ ；$-\left[\cos(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right]=\frac{1}{s}$ ；$\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}dt$表

$\sin at$之 Laplace 積分轉換，其積分結果計算如下：

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt &= \int_0^\infty \sin(at)\,d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= \left[\sin(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)d\sin(at) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\sin(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right] - \left[\sin(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0} + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{s}\right)(a\cos at\ dt) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\sin(at)}{se^{st}}\right] - \left[\sin(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right] + \frac{a}{s}\int_0^\infty \cos at\, e^{-st}dt \\
&= 0-0+\frac{a}{s}\int_0^\infty \cos at\, e^{-st}dt \\
&= \frac{a}{s}\int_0^\infty \cos at\, e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

基於此，函數$\cos(at)$之 Laplace 積分轉換可表爲：

$$\int_0^\infty \cos at\, e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin at\, e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\frac{a}{s}\int_0^\infty \cos at\, e^{-st} dt$$

同類項合併後，可得：

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^\infty \cos at\, e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

故$\cos(at)$之 Laplace 積分轉換結果爲：

$$\boxed{\int_0^\infty \cos at\, e^{-st} dt = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

範例二
試說明函數$5\cos(at)$之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可表為$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}
F(s)&=\int_0^{\infty} 5\cos(at)e^{-st}dt\\
&=5\int_0^{\infty}\cos(at)\,d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\\
&=5\left\{\left[\cos(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0}^{t\to\infty}-\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)d\cos(at)\right\}\\
&=5\left\{\lim_{t\to\infty}\left[\cos(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]-\left[\cos(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0}+\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-st}}{s}\right)(-a\sin at dt)\right\}\\
&=5\left\{\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos(at)}{se^{st}}\right]-\left[\cos(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right]-\frac{a}{s}\int_0^{\infty}\sin at\,e^{-st}dt\right\}
\end{aligned}$$

其中若 $s>0$，則$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos(at)}{se^{st}}\right]=0$ ；$-\left[\cos(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right]=\frac{1}{s}$ ；$\int_0^{\infty}\sin at\,e^{-st}dt$表 $\sin at$ 之 Laplace 積分轉換，其積分結果計算如下：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\sin(at)e^{-st}dt&=\int_0^{\infty}\sin(at)\,d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\\
&=\left[\sin(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0}^{t\to\infty}-\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)d\sin(at)\\
&=\lim_{t\to\infty}\left[\sin(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]-\left[\sin(at)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t=0}+\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-st}}{s}\right)(a\cos at\ dt)\\
&=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\sin(at)}{se^{st}}\right]-\left[\sin(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right]+\frac{a}{s}\int_0^{\infty}\cos at\,e^{-st}dt\\
&=0-0+\frac{a}{s}\int_0^{\infty}\cos at\,e^{-st}dt\\
&=\frac{a}{s}\int_0^{\infty}\cos at\,e^{-st}dt
\end{aligned}$$

基於此，函數$\cos(at)$之 Laplace 積分轉換可表爲：

$$\int_0^\infty \cos at\, e^{-st}dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\frac{a}{s}\int_0^\infty \cos at\, e^{-st}dt$$

同類項合併後，可得：

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^\infty \cos at\, e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

故$5\cos(at)$之 Laplace 積分轉換結果爲：

$$\boxed{\int_0^\infty 5\cos at\, e^{-st}dt = \frac{5s}{s^2+a^2}}$$

【另解】

因爲已知$L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$，所以$L\{5\cos(at)\} = 5L\{\cos(at)\} = \dfrac{5s}{s^2+a^2}$，即$\boxed{L\{5\cos(at)\} = \dfrac{5s}{s^2+a^2}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以 $s>0$ 之更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$ 。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

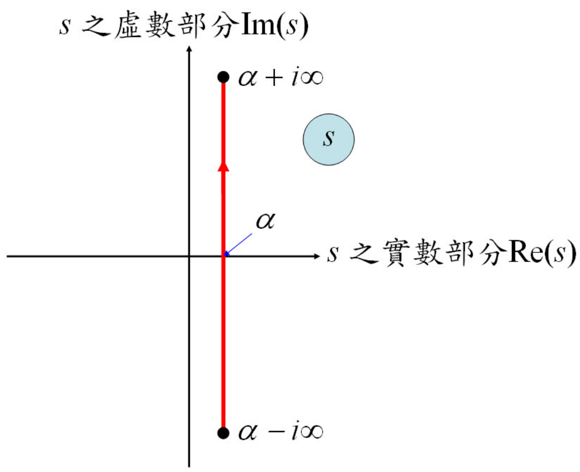

圖 1　在複數平面上，Laplace 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ Laplace 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{\cos(at)\}=s/(s^2+a^2)$是第八個要背下來的公式。