

提要 153：函數 $\sinh(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換

函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st} ，然後對變數 t 作 $[0, \infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0, \infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表為 $L\{f(t)\}$ ，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為：

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace*

積分反轉換可表為 $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st} ds$ 或 $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ 。今擬以範例說明函數 $\sinh(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一

試說明函數 $\sinh(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \sinh(at)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} L\{e^{at}\} - \frac{1}{2} L\{e^{-at}\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-(-a)} \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

由之前的討論知， $L\{e^{at}\}$ 的運算需考慮 $s-a > 0$ 的條件；而 $L\{e^{-at}\}$ 的運算需考慮 $s+a > 0$ 的條件。再整理一遍， $\sinh(at)$ 的 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$L\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

範例二

試說明函數 $5 \sinh(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} 5 \sinh(at) e^{-st} dt \\ &= 5 \int_0^{\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} e^{-st} dt \\ &= 5 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \right] \\ &= 5 \left[\frac{1}{2} L\{e^{at}\} - \frac{1}{2} L\{e^{-at}\} \right] \\ &= 5 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-(-a)} \right] \\ &= \frac{5a}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

由之前的討論知， $L\{e^{at}\}$ 的運算需考慮 $s-a > 0$ 的條件；而 $L\{e^{-at}\}$ 的運算需考慮 $s+a > 0$ 的條件。再整理一遍， $\sinh(at)$ 的 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$L\{5 \sinh(at)\} = \frac{5a}{s^2 - a^2}$$

【另解】

因為已知

$$L\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

所以

$$L\{5 \sinh(at)\} = 5L\{\sinh(at)\} = 5 \left(\frac{a}{s^2 - a^2} \right) = \frac{5a}{s^2 - a^2}$$

即 $L\{5 \sinh(at)\} = \frac{5a}{s^2 - a^2}$ 。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s > 0$
t	$1/s^2$	$s > 0$
t^2	$2/s^3$	$s > 0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s > 0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s > a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2 - a^2)$	$s - a > 0$ 且 $s + a > 0$
$\sinh(at)$	$a/(s^2 - a^2)$	$s - a > 0$ 且 $s + a > 0$

註：

- ❶ 因 a 大於零，又考慮 $s - a > 0$ 且 $s + a > 0$ ，故關於 s 之條件可表為 $s - a > 0$ 。因 s 是一個複數，所以更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於 a ，即 $\text{Re}(s) > a$ 。
- ❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\text{Re}(s) > a$ 的想法是可以實現的。

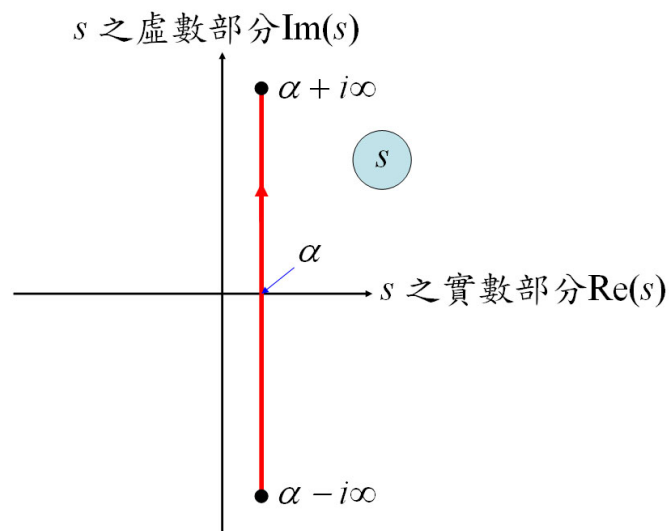


圖 1 在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

- ❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來， $L\{\sinh(at)\} = a/(s^2 - a^2)$ 是第七個要背下來的公式。