提要 152：函數 cosh(at)之 *Laplace* 積分轉換

函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義為：「將 $f(t)$乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數 t 作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$表示其積分後之結果，符號 $F(s)$亦常表為 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義為：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表為 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。今擬以範例說明函數 $\cosh(at)$之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數$\cosh(at)$之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可表為$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty \cosh(at)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{at}\,e^{-st}dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-at}\,e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2}L\{e^{at}\}+\frac{1}{2}L\{e^{-at}\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-(-a)} \\
&= \frac{s}{s^2-a^2}
\end{aligned}
$$

由之前的討論知，$L\{e^{at}\}$的運算需考慮$s-a>0$的條件；而$L\{e^{-at}\}$的運算需考慮$s+a>0$的條件。再整理一遍，$\cosh(at)$的 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$\boxed{L\{\cosh(at)\}=\frac{s}{s^2-a^2}}$$

範例二

試說明函數 $5\cosh(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty 5\cosh(at)e^{-st}dt \\
&= 5\int_0^\infty \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}e^{-st}dt \\
&= 5\left[\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt\right] \\
&= 5\left[\frac{1}{2}L\{e^{at}\}+\frac{1}{2}L\{e^{-at}\}\right] \\
&= 5\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-(-a)}\right] \\
&= \frac{5s}{s^2-a^2}
\end{aligned}
$$

由之前的討論知， $L\{e^{at}\}$ 的運算需考慮 $s-a>0$ 的條件；而 $L\{e^{-at}\}$ 的運算需考慮 $s+a>0$ 的條件。再整理一遍， $5\cosh(at)$ 的 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\{5\cosh(at)\}=\frac{5s}{s^2-a^2}}$$

【另解】

因爲已知

$$L\{\cosh(at)\}=\frac{s}{s^2-a^2}$$

所以

$$L\{5\cosh(at)\}=5L\{\cosh(at)\}=5\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right)=\frac{5s}{s^2-a^2}$$

即 $\boxed{L\{5\cosh(at)\}=\frac{5s}{s^2-a^2}}$ 。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$s-a>0$ 且 $s+a>0$

註：

❶ 因 a 大於零，又考慮 $s-a>0$ 且 $s+a>0$，故關於 s 之條件可表爲 $s-a>0$。因 s 是一個複數，所以更準確的條件寫法爲 s 之實數部分大於 a，即 $\text{Re}(s)>a$。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\text{Re}(s)>a$ 的想法是可以實現的。

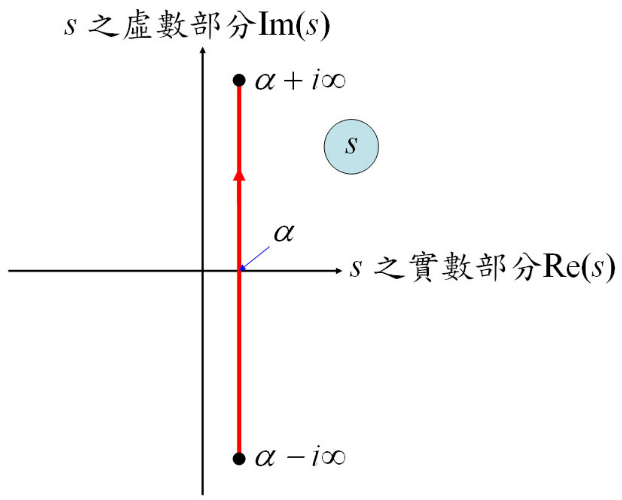

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{\cosh(at)\}=s/(s^2-a^2)$是第六個要背下來的公式。