提要 151：函數 exp(at)之 *Laplace* 積分轉換

函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將$f(t)$乘上一個指數衰減的函數e^{-st}，然後對變數t作$[0,\infty)$之線積分。」因係對變數t作$[0,\infty)$之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數t已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數s有關。這是對函數$f(t)$加工後得出之結果，故通常以符號$F(s)$表示其積分後之結果，符號$F(s)$亦常表爲$L\{f(t)\}$，表函數$f(t)$要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數s之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數$F(s)$之 *Laplace* 積分反轉換可表爲$f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$或$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。今擬以範例說明函數$e^{at}$之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 e^{at} 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} \left(e^{at}\right)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)\,t}dt \\
&= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)\,t}\Big|_{t=0}^{t\to\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)\,t}\right]-\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)\,t}\right]_{t=0} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)\,t}}\right]-\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)(0)}\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)\,t}}\right]+\frac{1}{s-a}
\end{aligned}
$$

其中之第一個極限運算若考慮 $s-a>0$ ，則第一個極限運算可表爲：

$$
\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)\,t}}\right]=-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)(\infty)}}=0
$$

所以， e^{at} 的 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$
\boxed{L\left\{e^{at}\right\}=\frac{1}{s-a}}
$$

範例二
試說明函數 $5e^{at}$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty \left(5e^{at}\right)e^{-st}dt \\
&= 5\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \\
&= 5\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{t=0}^{t\to\infty}\right] \\
&= 5\left\{\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]-\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_{t=0}\right\} \\
&= 5\left\{\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}}\right]-\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)(0)}\right]\right\} \\
&= 5\left\{\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}}\right]+\frac{1}{s-a}\right\}
\end{aligned}
$$

其中之第一個極限運算若考慮 $s-a>0$，則第一個極限運算可表爲：

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}}\right]=-\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)(\infty)}}=0$$

所以，$5e^{at}$ 的 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\left\{5e^{at}\right\}=\frac{5}{s-a}}$$

【另解】

因爲已知 $L\left\{e^{at}\right\}=\dfrac{1}{s-a}$ ，所以 $L\left\{5e^{at}\right\}=5L\left\{e^{at}\right\}=5\left(\dfrac{1}{s-a}\right)=\dfrac{5}{s-a}$ ，即 $\boxed{L\left\{5e^{at}\right\}=\dfrac{5}{s-a}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s>a$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於 a，即 $\mathrm{Re}(s)>a$。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>a$ 的想法是可以實現的。

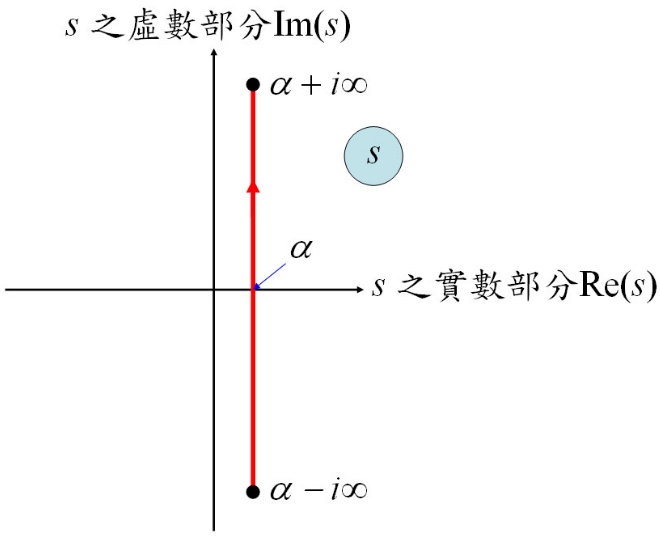

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{e^{at}\}=1/(s-a)$是第五個要背下來的公式。