提要 150：函數 t^n 之 *Laplace* 積分轉換

由之前的介紹知，函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$。今擬以範例說明函數 t^n 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 t^n 之 Laplace 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 Laplace 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty (t^n)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty t^n\, d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= t^n\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) d(t^n) \\
&= t^n\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)(nt^{n-1}dt) \\
&= \lim_{t\to\infty} t^n\left(-\frac{1}{se^{st}}\right) - t^n\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)_{t=0} + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

其中之第一個極限運算爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型式，需引用 n 次 *L'Hospital* 定則，分別對第一個極限運算式中之分子與分母所示函數裏頭的變數 t 微分。因此，只要 $s>0$ ，則第一個極限運算可表爲：

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^n}{se^{st}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{nt^{n-1}}{s^2e^{st}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)t^{n-2}}{s^3e^{st}}\right]$$
$$=\cdots$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)t^2}{s^{n-1}e^{st}}\right]$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)(2)t}{s^{n}e^{st}}\right]$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)(2)(1)}{s^{n+1}e^{st}}\right]$$
$$=\left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)(2)(1)}{s^{n+1}e^{s(\infty)}}\right]$$
$$=0$$

而$t^n\left(-\dfrac{1}{se^{st}}\right)_{t=0}=0^n\left(-\dfrac{1}{se^{s(0)}}\right)=0$。另有一積分式$\dfrac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$需討論其積分值，該積分式與函數$t^{n-1}$之 *Laplace* 積分轉換有關，說明如下。因爲：

$$\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt=\frac{n}{s}L\left\{t^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}L\left\{t^{n-2}\right\}$$
$$=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}L\left\{t^{n-3}\right\}$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}L\left\{t^{2}\right\}$$
$$=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}\frac{2}{s}L\left\{t\right\}$$
$$=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}\frac{2}{s}\frac{1}{s}L\left\{1\right\}$$
$$=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}\frac{2}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{s}$$
$$=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

所以，t^n的 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\left\{t^n\right\}=\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

範例二
試說明函數 $5t^n$ 之 Laplace 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 Laplace 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}
F(s)&=\int_0^\infty \left(5t^n\right)e^{-st}dt\\
&=5\int_0^\infty t^n\, d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\\
&=5\left[t^n\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty}-\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)d\left(t^n\right)\right]\\
&=5\left[t^n\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty}-\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\left(nt^{n-1}dt\right)\right]\\
&=5\left[\lim_{t\to\infty}t^n\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)-t^n\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)_{t=0}+\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt\right]
\end{aligned}$$

其中之第一個極限運算爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型式，需引用 n 次 *L'Hospital* 定則，分別對第一個極限運算式中之分子與分母所示函數裏頭的變數 t 微分。因此，只要 $s>0$ ，則第一個極限運算可表爲：

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^n}{se^{st}}\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{nt^{n-1}}{s^2e^{st}}\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)t^{n-2}}{s^3e^{st}}\right]\\
&= \cdots\\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)t^2}{s^{n-1}e^{st}}\right]\\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)(2)t}{s^{n}e^{st}}\right]\\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)(2)(1)}{s^{n+1}e^{st}}\right]\\
&= \left[-\frac{n(n-1)\cdots(3)(2)(1)}{s^{n+1}e^{s(\infty)}}\right]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

而$t^n\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)_{t=0} = 0^n\left(-\frac{1}{se^{s(0)}}\right) = 0$。另有一積分式$\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$需討論其積分值，該積分式與函數$t^{n-1}$之 *Laplace* 積分轉換有關，說明如下。因爲：

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt &= \frac{n}{s}L\{\,t^{n-1}\}\\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}L\{\,t^{n-2}\}\\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}L\{\,t^{n-3}\}\\
&= \cdots\\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}L\{\,t^{2}\}\\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}\frac{2}{s}L\{\,t\}\\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}\frac{2}{s}\frac{1}{s}L\{\,1\}\\
&= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{3}{s}\frac{2}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{s}\\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}
$$

所以，$5\,t^n$的 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\left\{\ 5t^n\right\}=\frac{5(n!)}{s^{n+1}}}$$

【另解】

因 爲 已 知 $L\left\{t^n\right\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$ ， 所 以 $L\left\{5t^n\right\}=5L\left\{t^n\right\}=5\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)=\frac{5(n!)}{s^{n+1}}$ ， 即 $\boxed{L\left\{5t^n\right\}=\frac{5(n!)}{s^{n+1}}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的想法是可以實現的。

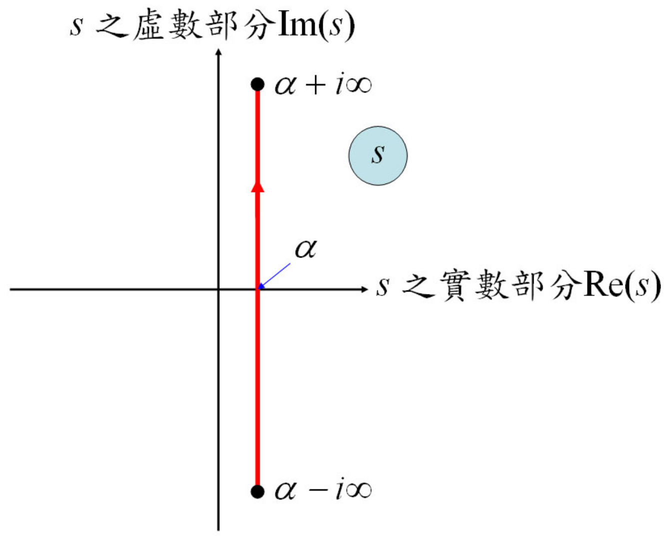

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{t^n\}=n!/s^{n+1}$ 是第四個要背下來的公式。