提要 149：函數 t^2 之 *Laplace* 積分轉換

由之前的介紹知，函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表為 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表為 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。今擬以範例說明函數 t^2 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 t^2 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty (t^2)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty t^2\, d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= t^2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) d\left(t^2\right) \\
&= t^2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)(2tdt) \\
&= \lim_{t\to\infty} t^2\left(-\frac{1}{se^{st}}\right) - t^2\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)_{t=0} + 2\int_0^\infty \left(\frac{te^{-st}}{s}\right)dt
\end{aligned}
$$

其中之第一個極限運算爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型式，需引用兩次 *L'Hospital* 定則，分別對第一個極限運算式中之分子與分母所示函數裏頭的變數 t 微分。因此，只要 $s>0$ ，則第一個極限運算 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^2}{se^{st}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2t}{s^2e^{st}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2}{s^3e^{st}}\right)=-\frac{2}{s^3e^{s(\infty)}}=0$ ，且 $t^2\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)_{t=0}=0^2\left(-\frac{1}{se^{s(0)}}\right)=0$ 。另有一積分式 $2\int_0^\infty\left(\frac{te^{-st}}{s}\right)dt$ 需討論其積分值，該積分式與函數 t 之 *Laplace* 積分轉換有關，說明如下。因爲：

$$
2\int_0^\infty \left(\frac{te^{-st}}{s}\right)dt = \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{2}{s}L\{t\} = \frac{2}{s}\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}
$$

所以，t^2 的 Laplace 積分轉換結果爲：

$$
\boxed{L\{t^2\}=\frac{2}{s^3}}
$$

範例二
試說明函數 $5t^2$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty \left(5t^2\right)e^{-st}dt \\
&= 5\int_0^\infty t^2\, d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= 5\left[t^2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)d\left(t^2\right)\right] \\
&= 5\left[t^2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)(2tdt)\right] \\
&= 5\left[\lim_{t\to\infty} t^2\left(-\frac{1}{se^{st}}\right) - t^2\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)_{t=0} + 2\int_0^\infty \left(\frac{te^{-st}}{s}\right)dt\right]
\end{aligned}
$$

其中之第一個極限運算爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型式，需引用兩次 *L'Hospital* 定則，分別對第一個極限運算式中之分子與分母所示函數裏頭的變數 t 微分。因此，只要 $s>0$ ，則第一個極限運算 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^2}{se^{st}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2t}{s^2e^{st}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2}{s^3e^{st}}\right)=-\frac{2}{s^3e^{s(\infty)}}=0$ ，且 $t^2\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)_{t=0}=0^2\left(-\frac{1}{se^{s(0)}}\right)=0$ 。另有一積分式 $2\int_0^\infty\left(\frac{te^{-st}}{s}\right)dt$ 需討論其積分值，該積分式與函數 t 之 *Laplace* 積分轉換有關，說明如下。因爲：

$$2\int_0^\infty\left(\frac{te^{-st}}{s}\right)dt=\frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}dt=\frac{2}{s}L\{t\}=\frac{2}{s}\frac{1}{s^2}=\frac{2}{s^3}$$

所以，$5t^2$ 的 Laplace 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\left\{5t^2\right\}=\frac{10}{s^3}}$$

【另解】

因爲已知$L\left\{t^2\right\}=\dfrac{2}{s^3}$，所以$L\left\{5t^2\right\}=5L\left\{t^2\right\}=5\left(\dfrac{2}{s^3}\right)=\dfrac{10}{s^3}$，即$\boxed{L\left\{5t^2\right\}=\dfrac{10}{s^3}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$
t^2	$2/s^3$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的要求是可以達成的。

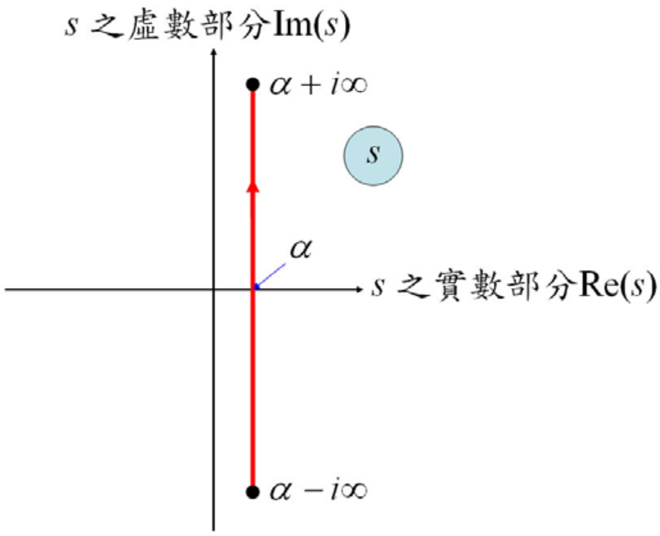

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{t^2\}=2/s^3$ 是第三個要背下來的公式。