提要 148：函數 t 之 *Laplace* 積分轉換

由之前的介紹知，函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：「將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。」因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表爲 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義爲：

$$\boxed{F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來與 *Fourier* 積分有關，而 *Fourier* 積分與 *Fourier* 級數有關，請讀者參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換的定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表爲 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$。今擬以範例說明函數 t 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明函數 t 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty (t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty t\,d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt \\
&= \lim_{t\to\infty} t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) - t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)_{t=0} + \left(-\frac{e^{-st}}{s^2}\right)_{t=0}^{t\to\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{se^{st}}\right) - (0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right) + \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s^2e^{st}}\right) - \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right)
\end{aligned}
$$

其中之第一個極限運算為 $\frac{\infty}{\infty}$ 型式，需引用 *L'Hospital* 定則。只要 $s>0$ ，則 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{se^{st}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s^2e^{st}}\right)=-\frac{1}{s^2e^{s(\infty)}}=0$ ， 且 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s^2e^{st}}\right)=0$ ； 另 外 ， $(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)=0$ ，且 $-\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2}$ 。故

$$\boxed{L\{t\}=\frac{1}{s^2}}$$

範例二
試說明函數 $5t$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty (5t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty 5t\,d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= 5\int_0^\infty t\,d\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= 5\left[t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt\right] \\
&= 5\left[\lim_{t\to\infty} t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) - t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)_{t=0} + \left(-\frac{e^{-st}}{s^2}\right)_{t=0}^{t\to\infty}\right] \\
&= 5\left[\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{se^{st}}\right) - (0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right) + \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s^2e^{st}}\right) - \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

其中之第一個極限運算爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型式，需引用 *L'Hospital* 定則。只要 $s>0$，則 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{se^{st}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s^2e^{st}}\right)=-\frac{1}{s^2e^{s(\infty)}}=0$，且 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s^2e^{st}}\right)=0$；另外，$(0)\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)=0$，且 $-\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2}$。故

$$\boxed{L\{t\}=\frac{5}{s^2}}$$

【另解】

因爲已知 $L\{t\}=\frac{1}{s^2}$，所以 $L\{5t\}=5L\{t\}=5\left(\frac{1}{s^2}\right)=\frac{5}{s^2}$，即 $\boxed{L\{5t\}=\frac{5}{s^2}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$
t	$1/s^2$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的要求是可以達成的。

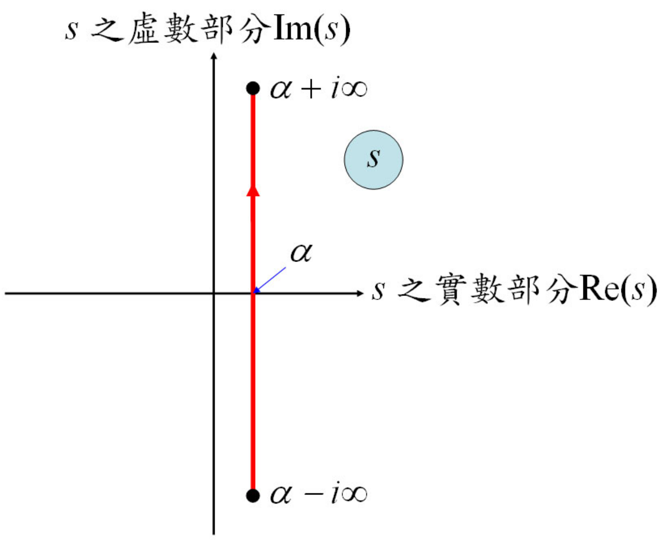

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{t\}=1/s^2$ 是第二個要背下來的公式。