提要 147：常數 1 之 *Laplace* 積分轉換

已知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為將 $f(t)$ 乘上一個指數衰減的函數 e^{-st}，然後對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分。因係對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之線積分，故積分完成並代入上下限之後，積分結果中之變數 t 已完全消失，因此積分後之結果應僅與參數 s 有關。這是對函數 $f(t)$ 加工後得出之結果，故通常以符號 $F(s)$ 表示其積分後之結果，符號 $F(s)$ 亦常表為 $L\{f(t)\}$，表函數 $f(t)$ 要執行 *Laplace* 積分轉換。根據以上之描述，可知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的定義為：

$$\boxed{F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

而 *Laplace* 積分反轉換亦牽涉一線積分，但與複數變數 s 之線積分有關，其由來請參考前面單元的介紹。根據之前所介紹之 *Laplace* 積分反轉換之定義可知，函數 $F(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換可表為 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}ds$ 或 $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$。今擬以範例說明常數 1 之 *Laplace* 積分轉換。

範例一
試說明常數 1 之 Laplace 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 Laplace 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty (1)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)-\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)_{t=0} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)-\left(-\frac{e^{0}}{s}\right)
\end{aligned}
$$

其中只要 $s>0$ ，則 $\lim_{t\to\infty} e^{st}\to\infty$ ，故 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{se^{st}}\right)=0$ ，而

$$\boxed{L\{1\}=\frac{1}{s}}$$

範例二
試說明常數 5 之 Laplace 積分轉換的結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 Laplace 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，亦即：

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty (5)e^{-st}dt \\
&= 5\int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= -\frac{5e^{-st}}{s}\bigg|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{5e^{-st}}{s}\right)-\left(-\frac{5e^{-st}}{s}\right)_{t=0} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{5}{se^{st}}\right)-\left(-\frac{5e^{0}}{s}\right)
\end{aligned}
$$

其中只要 $s>0$，則 $\lim_{t\to\infty}e^{st}\to\infty$，故 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{5}{se^{st}}\right)=0$，而

$$\boxed{L\{5\}=\frac{5}{s}}$$

【另解】

因爲已知 $L\{1\}=\frac{1}{s}$，所以 $L\{5\}=5L\{1\}=5\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{5}{s}$，即 $\boxed{L\{5\}=\frac{5}{s}}$。

摘要

$f(t)$	$F(s)$	條件
1	$1/s$	$s>0$

註：

❶ 因 s 是一個複數，所以更準確的條件寫法為 s 之實數部分大於零，即 $\mathrm{Re}(s)>0$。

❷ s 是落在如下圖所示之紅色直線上，因此 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的要求是可以達成的。

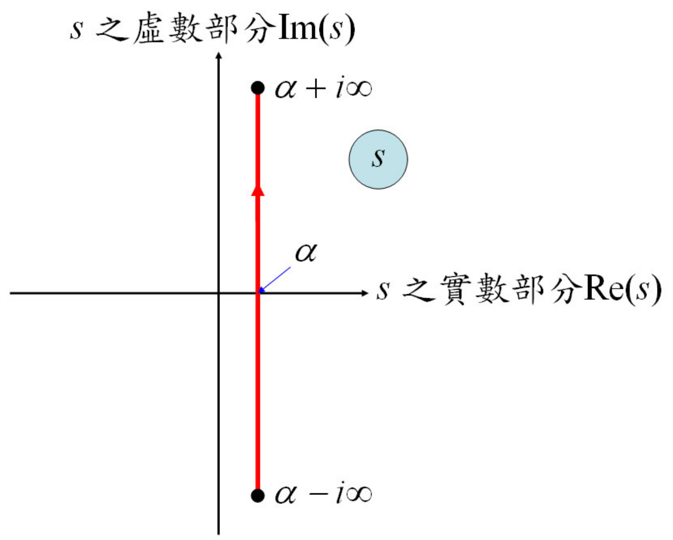

圖 1　在複數平面上，*Laplace* 積分轉換所考慮複數變數 s 係落在紅色線上的點。

❸ *Laplace* 積分轉換公式一共有 17 個要背下來，$L\{1\}=1/s$ 是第一個要背下來的公式。