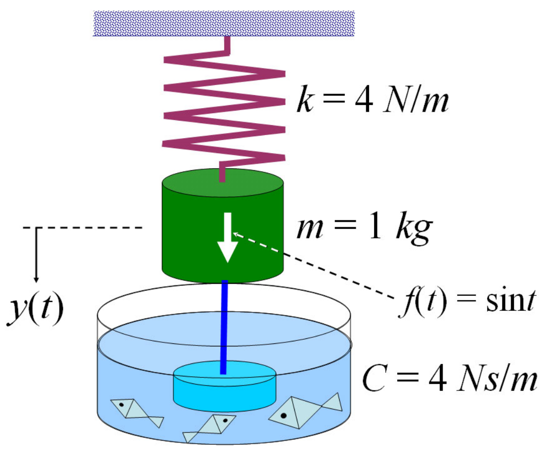
提要 145：*Laplace* 積分轉換方法與複變分析有什麼關係？

在作 *Laplace* 積分反轉換時，可引用複變分析理論加以求解。茲以前面曾引介之範例，說明 *Laplace* 積分轉換方法與複變分析的關係。

範例一
試以複變分析原理說明以下所示振動問題之數學模式的解： $$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t \text{ ， } y(0)=0 \text{ ， } \frac{dy(0)}{dt}=1$$  其中 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t$ 是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；$y(0)=0$ 表物體之初始位置爲平衡位置；$\frac{dy(0)}{dt}=1$ 指物體之初始速度爲向下 $1m/s$。本題是擬推求質量爲 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析，但於進行 *Laplace* 積分反轉換時，則引用複變分析原理說明解題過程。

步驟一　對數學模式作 Laplace 積分轉換

首先讓控制方程式乘以 e^{-st} ，再對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之積分，亦即：

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y\right)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\sin t\, e^{-st}dt \tag{1}$$

上式等號左邊可改寫爲先積分再作相加之運算：

$$\int_0^{\infty}\frac{d^2y}{dt^2}e^{-st}dt+\int_0^{\infty}4\frac{dy}{dt}e^{-st}dt+\int_0^{\infty}4y\,e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\sin t\, e^{-st}dt \tag{2}$$

再進行部分積分(*Integration by Part*，或譯爲**分佈積分**)之運算，此一運算是表 1 所示各個 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據方法，讀者若是初學者，請暫時接受以下所示之結果。基於此，上式可改寫爲：

$$\left[s^2\int_0^{\infty}y\,e^{-st}dt-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}\right]+4\left[s\int_0^{\infty}y\,e^{-st}dt-y(0)\right]+4\int_0^{\infty}y\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1} \tag{3}$$

步驟二　將微分方程問題化簡爲代數問題

再將問題之初始條件 $y(0)=0$ 、 $\frac{dy(0)}{dt}=1$ 代入式(3)，則可得：

$$\left[s^2\int_0^{\infty}y\,e^{-st}dt-1\right]+4s\int_0^{\infty}y\,e^{-st}dt+4\int_0^{\infty}y\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1} \tag{4}$$

上式不再出現微分項，若以 $Y(s)$ 表示其中之積分 $\int_0^{\infty}y\,e^{-st}dt$ ，則：

$$\left[s^2Y-1\right]+4sY+4Y=\frac{1}{s^2+1} \tag{5}$$

很清楚的，這是一個代數方程式，可以應用加減乘除的概念，解出未知數 $Y(s)$ 。

步驟三　解出積分轉換域的解 $Y(s)$

式(5)經整理後，可得：

$$\left(s^2+4s+4\right)Y=\frac{1}{s^2+1}+1=\frac{s^2+2}{s^2+1} \tag{5'}$$

亦即：

$$Y(s)=\frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)} \tag{6}$$

上式稱為問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，其中之符號 $Y(s)=\int_0^\infty y\,e^{-st}dt$ 。

步驟四　解出真正的解 *y*(*t*)

以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行上式之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，這些公式，後續單元會逐一介紹，但這裏先將這 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式列出，如表 1 所示，以方便應用。二是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Y(s)e^{st}ds$ 。此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，雖然目前大部分的讀者都尚未學過複變分析，但本單元將嘗試引用複變分析理論作 *Laplace* 積分反轉換，除讓讀者瞭解複變分析理論之重要性外，亦希望能吸引有興趣的讀者繼續修習複變分析之課程單元。

方法一　以表 1 中之 17 個公式為基礎作 *Laplace* 積分反轉換

茲將 $Y(s)=\frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}$ 化簡為簡單之部分分式，亦即考慮：

$$Y(s)=\frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{cs+d}{s^2+4s+4}$$

通分後，可得：

$$Y(s)=\frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}=\frac{(a+c)s^3+(4a+b+d)s^2+(4a+4b+c)s+(4b+d)}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}$$

比較係數後可知：

$$
\begin{cases}
a+c=0\\
4a+b+d=1\\
4a+4b+c=0\\
4b+d=2
\end{cases}
$$

解析此聯立代數方程式可得：$a=-\dfrac{4}{25}$ 、$b=\dfrac{3}{25}$ 、$c=\dfrac{4}{25}$ 、$d=\dfrac{38}{25}$ 。亦即：

$$
\begin{aligned}
Y(s)&=\frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}\\
&=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s+3}{s^2+1}+\frac{4s+38}{s^2+4s+4}\right)\\
&=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4s+8+30}{s^2+4s+4}\right)\\
&=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2}+\frac{30}{(s+2)^2}\right]\\
&=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4}{s+2}+\frac{30}{(s+2)^2}\right]
\end{aligned}
$$

因此問題於時間域 t 之解爲：

$$
y(t)=-\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{3}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}+\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{30}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}
$$

由 表 1 知 ， $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$ ， $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ ， $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t}$ ，

$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^2}\right\}=te^{-2t}$ ，故問題之解爲：

$$
\boxed{y(t)=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t+\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{30}{25}te^{-2t}}
$$

上式即爲此問題之解。

方法二　以複變分析理論作 *Laplace* 積分反轉換

已知 *Laplace* 積分反轉換之公式為 $y(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Y(s)e^{st}ds$，其中積分變數 s 是一個複數變數，此可由其積分之上下限與虛數 i 有關得知。$y(t)$之計算，是需作如圖 1 所示紅色線段之線積分，這是一條無限長之線積分。

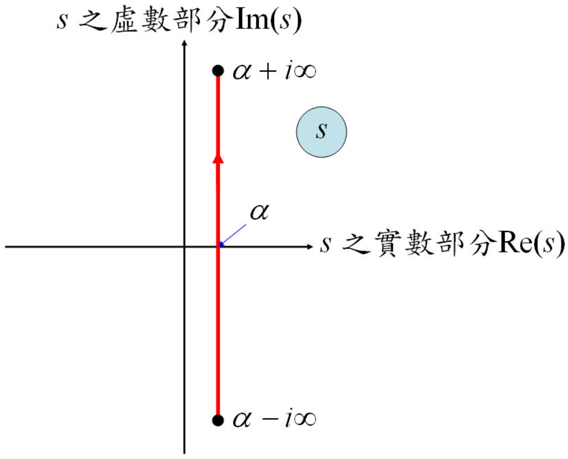


圖 1　在複數平面上作 *Laplace* 積分反轉換時所考慮之積分路徑

現在，$Y(s)=-\dfrac{4}{25}\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{3}{25}\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{4}{25}\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{30}{25}\dfrac{1}{(s+2)^2}$，所以，與時間 t 有關之真實的解為：

$$
\begin{aligned}
y(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}+\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}+\frac{30}{25}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}\right)e^{st}ds\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}\right)e^{st}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[\frac{30}{25}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds
\end{aligned}
$$

關於各項積分式之積分值，需引用封閉積分路徑的觀念，說明如下。

❶ 關於 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds$ 之積分值

由積分路徑之加減觀念知，如圖 2 所示之封閉積分路徑減去 $C_{R\to\infty}$ 之積分路徑，就是紅色之原垂直線的積分路徑。亦即：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R\to\infty}}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds$$

其中 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R\to\infty}}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds\to 0$，這一部分之證明，往後複變分析單元再加以證明。因此，第一部分之線積分可表爲：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds$$

有一個與封閉積分路徑有關之定理現在要先拿來用一下，其證明以後再說。此一定理稱爲 *Cauchy* 積分公式，其內容爲：

Cauchy 積分公式
若單閉區間（*Simply Connected Domain*，表定義域中無破洞、裂縫、未定義之點等）C 內，$f(z)$是解析函數（*Analytical Function*，即定義域中之點都可以代入 $f(z)$中），又 z_0 落在 C 內，則： $\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$ 或 $\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=2\pi i f^{(n)}(z_0)$

現在，積分變數 s 就是複數變數 z 的另一種表達方式，故：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[-\frac{4}{25}\frac{s}{(s+i)(s-i)}\right]e^{st}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[-\frac{4}{25}\left(\frac{1/2}{s+i}+\frac{1/2}{s-i}\right)\right]e^{st}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[-\frac{2}{25}\left(\frac{1}{s+i}+\frac{1}{s-i}\right)\right]e^{st}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{2}{25}\frac{1}{s+i}\right)e^{st}ds+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{2}{25}\frac{1}{s-i}\right)e^{st}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{-2/25\,e^{st}}{s+i}ds+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{-2/25\,e^{st}}{s-i}ds\end{aligned}$$

根據 *Cauchy* 積分公式，上式可表爲：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(-\frac{2}{25}e^{st}\right)\right]_{s=-i}+\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(-\frac{2}{25}e^{st}\right)\right]_{s=i}$$

$$=-\frac{2}{25}e^{-it}-\frac{2}{25}e^{it}$$

$$=-\frac{2}{25}(\cos t-i\sin t)-\frac{2}{25}(\cos t+i\sin t)$$

$$=-\frac{4}{25}\cos t$$

❷ 關於 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}\right)e^{st}ds$ 之積分值

同理，上式亦可引用 *Cauchy* 積分公式，推求其積分值：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{50}\frac{1}{s-i}+\frac{3}{50}\frac{1}{s+i}\right)e^{st}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(\frac{3}{50}e^{st}\right)\right]_{s=i}+\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(\frac{3}{50}e^{st}\right)\right]_{s=-i}$$

$$=\frac{3}{50}e^{it}+\frac{3}{50}e^{-it}$$

$$=\frac{3}{50}(\cos t+i\sin t)+\frac{3}{50}(\cos t-i\sin t)$$

$$=\frac{3}{25}\cos t$$

❸ 關於 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}\right)e^{st}ds$ 之積分值

由 *Cauchy* 積分公式知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(\frac{4}{25}e^{st}\right)\right]_{s=-2}=\frac{4}{25}e^{-2t}$$

❹ 關於 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[\frac{30}{25}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds$ 之積分值

由 *Cauchy* 積分公式知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[\frac{30}{25}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\frac{d\left(30/25\,e^{st}\right)}{ds}\right]_{s=-2}=\frac{30}{25}te^{st}\Big|_{s=-2}=\frac{30}{25}te^{-2t}$$

由❶、❷、❸、❹之計算知：

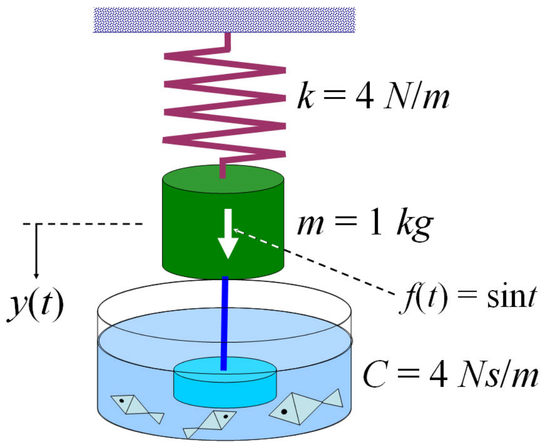
$$\boxed{y(t)=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\cos t+\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{30}{25}te^{-2t}}$$

故根據複變分析理論，確實可以執行 *Laplace* 積分反轉換之運算。讀者若有興趣，請再參考複變分析相關單元之介紹。

範例二

試以複變分析原理說明以下所示振動問題之數學模式的解：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t\text{，}y(0)=0\text{，}\frac{dy(0)}{dt}=0$$



其中$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t$是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；$y(0)=0$表物體之初始位置爲平衡位置；$\frac{dy(0)}{dt}=0$指物體之初始速度爲向下零。本題是擬推求質量爲 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析，但於進行 *Laplace* 積分反轉換時，則引用複變分析原理說明解題過程。

步驟一　對數學模式作 Laplace 積分轉換

首先讓控制方程式乘以e^{-st}，再對變數 t 作$[0,\infty)$之積分，亦即：

$$\int_0^\infty\left(\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y\right)e^{-st}dt=\int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt \tag{1}$$

上式等號左邊可改寫爲先積分再作相加之運算：

$$\int_0^\infty \frac{d^2y}{dt^2}e^{-st}dt+\int_0^\infty 4\frac{dy}{dt}e^{-st}dt+\int_0^\infty 4y\,e^{-st}dt=\int_0^\infty \sin t\,e^{-st}dt \tag{2}$$

再進行部分積分(*Integration by Part*，或譯爲分佈積分)之運算，此一運算是表 1 所示各個 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據方法，讀者若是初學者，請暫時接受以下所示之結果。基於此，上式可改寫爲：

$$\left[s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}\right]+4\left[s\int_0^\infty y\,e^{-st}dt-y(0)\right]+4\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1} \tag{3}$$

步驟二　將微分方程問題化簡爲代數問題

再將問題之初始條件 $y(0)=0$ 、 $\dfrac{dy(0)}{dt}=0$ 代入式(3)，則可得：

$$s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt+4s\int_0^\infty y\,e^{-st}dt+4\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1} \tag{4}$$

上式不再出現微分項，若以 $Y(s)$ 表示其中之積分 $\int_0^\infty y\,e^{-st}dt$ ，則：

$$s^2Y+4sY+4Y=\frac{1}{s^2+1} \tag{5}$$

很清楚的，這是一個代數方程式，可以應用加減乘除的概念，解出未知數 $Y(s)$ 。

步驟三　解出積分轉換域的解 $Y(s)$

式(5)經整理後，可得：

$$\left(s^2+4s+4\right)Y=\frac{1}{s^2+1} \tag{5’}$$

亦即：

$$Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)} \tag{6}$$

上式稱爲問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，其中之符號 $Y(s)=\int_0^\infty y\,e^{-st}dt$ 。

步驟四　解出真正的解 $y(t)$

以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行上式之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，這些公式，後續單元會逐一介紹，但這裏先將這 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式列出，如表 1 所示，以方便應用。二是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Y(s)e^{st}ds$ 。此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，雖然目前大部分的讀者都尚未學過複變分析，但本單元將嘗試引用複變分析理論作 *Laplace* 積分反轉換，除讓讀者瞭解複變分析理論之重要性外，亦希望能吸引有興趣的讀者繼續修習複變分析之課程單元。

方法一　以表 1 中之 17 個公式爲基礎作 *Laplace* 積分反轉換

茲將 $Y(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$ 化簡爲簡單之部分分式，亦即考慮：

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{cs+d}{s^2+4s+4}$$

通分後，可得：

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}=\frac{(a+c)s^3+(4a+b+d)s^2+(4a+4b+c)s+(4b+d)}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$$

比較係數後可知：

$$\begin{cases}a+c=0\\4a+b+d=0\\4a+4b+c=0\\4b+d=1\end{cases}$$

解析此聯立代數方程式可得：$a=-\frac{4}{25}$、$b=\frac{3}{25}$、$c=\frac{4}{25}$、$d=\frac{13}{25}$。亦即：

$$
\begin{aligned}
Y(s)&=\frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}\\
&=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s+3}{s^2+1}+\frac{4s+13}{s^2+4s+4}\right)\\
&=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4s+8+5}{s^2+4s+4}\right)\\
&=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2}+\frac{5}{(s+2)^2}\right]\\
&=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4}{s+2}+\frac{5}{(s+2)^2}\right]
\end{aligned}
$$

因此問題於時間域 t 之解爲：

$$y(t)=-\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{3}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}+\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

由 表 1 知 ， $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$ ， $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ ， $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t}$ ， $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}=te^{-2t}$ ，故問題之解爲：

$$\boxed{y(t)=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t+\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{1}{5}te^{-2t}}$$

上式即爲此問題之解。

方法二　以複變分析理論作 *Laplace* 積分反轉換

已知 *Laplace* 積分反轉換之公式爲 $y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Y(s)e^{st}ds$ ，其中積分變數 s

是一個複數變數，此可由其積分之上下限與虛數 i 有關得知。$y(t)$之計算，是需作如圖 1 所示紅色線段之線積分，這是一條無限長之線積分。

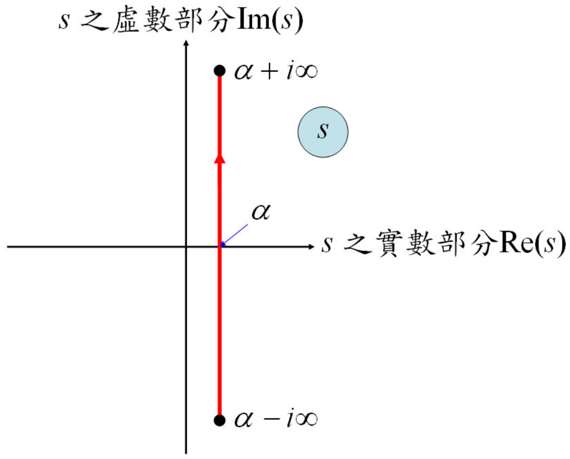


圖 1　在複數平面上作 *Laplace* 積分反轉換時所考慮之積分路徑

現在，$Y(s)=-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}+\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(s+2)^2}$ ，所以，與時間 t 有關之真實的解爲：

$$
\begin{aligned}
y(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}+\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}\right)e^{st}ds\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}\right)e^{st}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[\frac{1}{5}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds
\end{aligned}
$$

關於各項積分式之積分值，需引用封閉積分路徑的觀念，說明如下。

❶ 關於$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds$ 之積分值

由積分路徑之加減觀念知，如圖 2 所示之封閉積分路徑減去 $C_{R\to\infty}$ 之積分路徑，就是紅色之原垂直線的積分路徑。亦即：

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R\to\infty}}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds
$$

其中$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R\to\infty}}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds\to 0$，這一部分之證明，往後複變分析單元再加以證明。因此，第一部分之線積分可表爲：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds$$

有一個與封閉積分路徑有關之定理現在要先拿來用一下，其證明以後再說。此一定理稱爲 *Cauchy* 積分公式，其內容爲：

Cauchy 積分公式
若單閉區間（*Simply Connected Domain*，表定義域中無破洞、裂縫、未定義之點等）*C* 內，$f(z)$是解析函數（*Analytical Function*，即定義域中之點都可以代入$f(z)$中），又z_0落在 *C* 內，則： $\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$ 或 $\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=2\pi i f^{(n)}(z_0)$

現在，積分變數 s 就是複數變數 z 的另一種表達方式，故：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[-\frac{4}{25}\frac{s}{(s+i)(s-i)}\right]e^{st}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[-\frac{4}{25}\left(\frac{1/2}{s+i}+\frac{1/2}{s-i}\right)\right]e^{st}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[-\frac{2}{25}\left(\frac{1}{s+i}+\frac{1}{s-i}\right)\right]e^{st}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{2}{25}\frac{1}{s+i}\right)e^{st}ds+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(-\frac{2}{25}\frac{1}{s-i}\right)e^{st}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{-2/25\,e^{st}}{s+i}ds+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{-2/25\,e^{st}}{s-i}ds
\end{aligned}$$

根據 *Cauchy* 積分公式，上式可表爲：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(-\frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(-\frac{2}{25}e^{st}\right)\right]_{s=-i}+\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(-\frac{2}{25}e^{st}\right)\right]_{s=i}$$

$$=-\frac{2}{25}e^{-it}-\frac{2}{25}e^{it}$$

$$=-\frac{2}{25}(\cos t-i\sin t)-\frac{2}{25}(\cos t+i\sin t)$$

$$=-\frac{4}{25}\cos t$$

❷ 關於$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}\right)e^{st}ds$ 之積分值

同理，上式亦可引用 *Cauchy* 積分公式，推求其積分值：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{3}{50}\frac{1}{s-i}+\frac{3}{50}\frac{1}{s+i}\right)e^{st}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(\frac{3}{50}e^{st}\right)\right]_{s=i}+\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(\frac{3}{50}e^{st}\right)\right]_{s=-i}$$

$$=\frac{3}{50}e^{it}+\frac{3}{50}e^{-it}$$

$$=\frac{3}{50}(\cos t+i\sin t)+\frac{3}{50}(\cos t-i\sin t)$$

$$=\frac{3}{25}\cos t$$

❸ 關於$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}\right)e^{st}ds$ 之積分值

由 *Cauchy* 積分公式知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{4}{25}\frac{1}{s+2}\right)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\left(\frac{4}{25}e^{st}\right)\right]_{s=-2}=\frac{4}{25}e^{-2t}$$

❹ 關於$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[\frac{1}{5}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds$ 之積分值

由 *Cauchy* 積分公式知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[\frac{1}{5}\frac{1}{(s+2)^2}\right]e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\frac{d\left(1/5\,e^{st}\right)}{ds}\right]_{s=-2}=\frac{1}{5}te^{st}\Big|_{s=-2}=\frac{1}{5}te^{-2t}$$

由❶、❷、❸、❹之計算知：

$$\boxed{y(t)=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\cos t+\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{1}{5}te^{-2t}}$$

故根據複變分析理論，確實可以執行 *Laplace* 積分反轉換之運算。讀者若有興趣，請再參考複變分析相關單元之介紹。

表 1　常用之 17 個 *Laplace* 積分轉換暨反轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ 其中 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)=\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right]\left[\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right]$