提要 146：*Laplace* 積分轉換之存在性定理與線性相加定理

Laplace 積分轉換之存在性定理有四個條件，說明如下。

Laplace 積分轉換之存在性定理(***Existence Theorem*** *for Laplace Transform*)
若 $f(t)$滿足以下四個條件，則其 *Laplace* 積分轉換存在： ❶ $f(t)$至少需為片斷連續函數（若 $f(t)$為連續函數那就更好了）； ❷ $t \geq 0$ ； ❸ 存在 M 與 γ ，使得 $\lvert f(t) \rvert \leq Me^{\gamma t}$ ； ❹ $s > \gamma$ 。

證明：

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| &\leq \int_0^\infty \lvert f(t) \rvert e^{-st} dt \\
&\leq \int_0^\infty Me^{\gamma t} e^{-st} dt \\
&= M \int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t} dt \\
&= -\frac{M}{s-\gamma} e^{-(s-\gamma)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{M}{s-\gamma} e^{-(s-\gamma)t} \right] - \left(-\frac{M}{s-\gamma} \right) \\
&= \frac{M}{s-\gamma}
\end{aligned}$$

由以上證明得知，在定理中所示之四個條件下， $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換存在。茲舉一反例說明 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換不存在。

範例一
請問 $f(t)=e^{t^2}$ 之 *Laplace* 積分轉換是否存在？

解答：

回答此一問題時，需檢驗定理中之四個條件。

條件	判斷情況
❶ $f(t)$是否至少是片斷連續函數？	因 $f(t)=e^{t^2}$，此為連續函數，比片斷連續函數之條件的要求更高，故 $f(t)=e^{t^2}$ 應算是有滿足 $f(t)$至少需為片斷連續函數的要求。
❷ $t\geq 0$ ？	此一條件應有滿足。
❸ 存在M與γ，使得$\lvert f(t)\rvert\leq Me^{\gamma t}$ ？	這裏所要求的 M 與 γ 係需考慮為固定值。假設當 $t=1\times 10^{10}$時，則 $f(t)=e^{t^2}=e^{(10^{10})^2}=e^{10^{20}}$，故可令 $M=3^{10^{20}}$、$\gamma=1$，使得$\lvert f(t)\rvert\leq Me^{\gamma t}$。但這只是短暫的，當 $t=1\times 10^{100}$時，這樣安排的M與γ，顯然就不再滿足 $\lvert f(t)\rvert\leq Me^{\gamma t}$的條件了，故第❸個條件並沒有滿足。
❹ $s>\gamma$ ？	因γ不存在，故第❹個條件亦不滿足。

Laplace 積分轉換之線性相加定理係指，積分轉換過程中相加之運算與積分之運算可以互相對調，說明如下。

Laplace 積分轉換之線性相加定理(***Linearity*** *of the Laplace Transform*)
$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$ 或 $\int_0^\infty [af(t)+bg(t)]e^{-st}dt = a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$

此一定理應很直接並容易領悟。

範例二
試說明線性相加定理在解析以下所示振動問題之數學模式的解時，其應用方式。 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t$ ， $y(0)=0$ ， $\frac{dy(0)}{dt}=1$

解答：

此一問題的解析可使用線性相加定理，因爲原式作 *Laplace* 轉換時：

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt \qquad (1)$$

可將上式改寫爲先作相加後作積分之運算，亦即：

$$\int_0^\infty \frac{d^2y}{dt^2}e^{-st}dt + \int_0^\infty 4\frac{dy}{dt}e^{-st}dt + \int_0^\infty 4y\,e^{-st}dt = \int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt \qquad (2)$$

此即爲線性相加定理的應用。