提要 144：應用 *Laplace* 積分轉換方法時所可能遭遇的瓶頸

最常遭遇的瓶頸是 *Laplace* 積分反轉換無法順利進行！讀者應已知道，學習 *Laplace* 積分轉換方法的主要目的是用以解出數學模式之解，對土木系等相關科系的學生而言，因常面對地震所引起的結構與土壤等之振動問題，故需瞭解振動問題之數學模式如何求解。因振動問題也是機械、車輛、造船、航空、工程科學等相關科系之教學暨研究重點，且電流問題與振動問題具有類比的關係。因此，幾乎所有工程相關科系的學生都應熟悉振動問題或電流問題的數學模式如何求解。

已知強制振動問題之控制方程式為：

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=f(t)} \tag{1}$$

其中 y 是物體之位移量；m 為物體質量；C 是阻尼係數(*Damping Coefficient*)；k 為彈簧的彈性常數(*Spring Constant*)；$f(t)$則是作用在物體上之與時間有關的外力。又電流問題之控制方程式為：

$$\boxed{L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E'(t)} \tag{2}$$

其中 I 是電流；L 為電桿(*Inductance*)；R 為電阻(*Resistance*)；C 是電容(*Capacitance*)；$E'(t)$則是電動勢(*Electromotive Force*) $E(t)$的導數。這兩種問題之類比關係如表 1 所示。

非常有趣的是，大自然中，有許多現象均具有類比關係，因此一個微分方程式可以代表許多的意義。我們的生活體驗亦有類似的現象，因為士農工商各界人士所體驗的人生哲理，都能深深打動人心。亦即，在商界人士所體驗的箴言，其實也適用於在工程界所陳明的箴言。例如，商界的王永慶說:「一勤天下無難事」。科學界的愛迪生則說：「天才就是百分之九十九的汗水加百分之一的靈感」。雖然背景與專長不相同，但其對人生的體驗確實具有類比的相似關係。

以 *Laplace* 積分轉換方法解析這兩種問題時，最常遭遇的瓶頸是 *Laplace* 積分反轉換無法順利進行！也就是流程圖 1 中，由第三步驟至第四步驟之過程發生困難。第二個瓶頸則是流程圖 1 中，由步驟一至步驟二之過程發生困難。但幾乎所有的研究所考試所出現之相關試題，只要讀者能熟背表 2 中所示之 17 個 *Laplace* 積分轉換公式，就能避免這兩類瓶頸問題。

表 1　強制振動問題與電流問題之類比關係

強制振動問題	電流問題
$m\dfrac{d^2y}{dt^2}+C\dfrac{dy}{dt}+ky=f(t)$	$L\dfrac{d^2I}{dt^2}+R\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{C}I=E'(t)$
質量(*Mass*) m	電桿(*Inductance*) L
阻尼係數(*Damping Coefficient*) C	電阻(*Resistance*) R
彈簧常數(*Spring Modulus*) k	電容(*Capacitance*) C 之倒數
驅動外力(*Driving Force*) $f(t)$	電動勢(*Electromotive Force*) $E(t)$的導數
位移(*Displacement*) $y(t)$	電流(*Current*) $I(t)$

表 2　常用之 17 個 *Laplace* 積分轉換暨反轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\dfrac{2}{s^3}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ 其中 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)=\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right]\left[\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right]$

應用表 1 所示之類比關係，則可以電流試驗模擬振動試驗，這是一個相當重要的發現，因爲有些很危險並昂貴的振動試驗，可以簡單且便宜的電流試驗取代之。

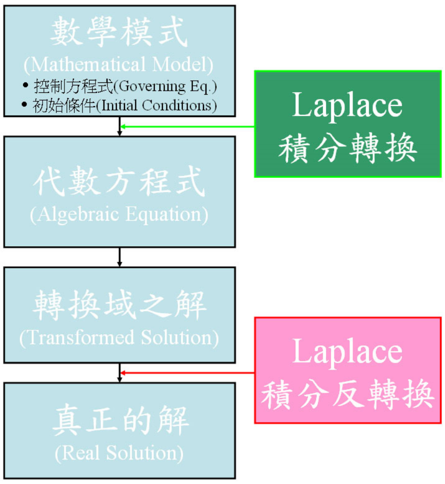

圖 1　以 *Laplace* 積分轉換方法解析數學模式之過程