

提要 143：Laplace 積分轉換方法的主要用途

Laplace 積分轉換主要是用來解微分方程式用的，本來應該分別各舉一常微分方程式與偏微分方程式的範例加以說明，但暫時還是單純介紹常微分方程式的範例如何解析就好，因為讀者大部分可能都還未接觸偏微分方程式，也還沒有學會全部的 Laplace 積分轉換。以此方式安排授課內容，旨在說明學習 Laplace 積分轉換的動機，以吸引讀者投入 Laplace 積分轉換的學習。

以 Laplace 積分轉換解析常微分方程式時，其解析過程如圖 1 所示；以 Laplace 積分轉換解析偏微分方程式時，其解析過程如圖 2 所示。

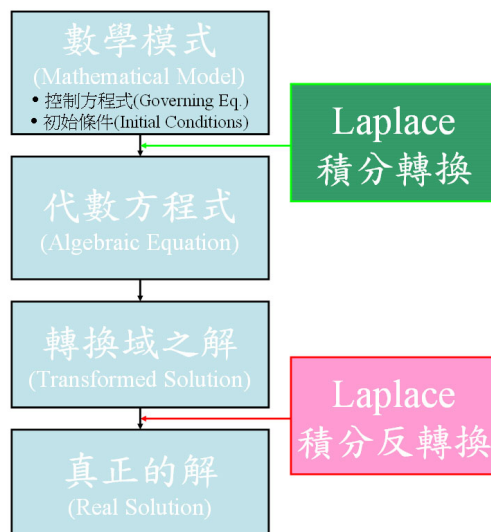


圖 1 以 Laplace 積分轉換解析常微分方程式之觀念流程圖

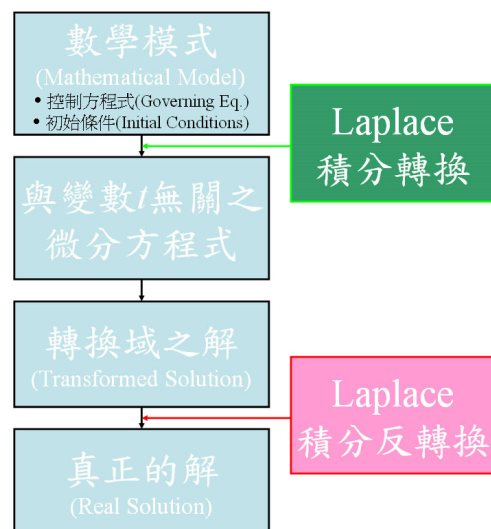
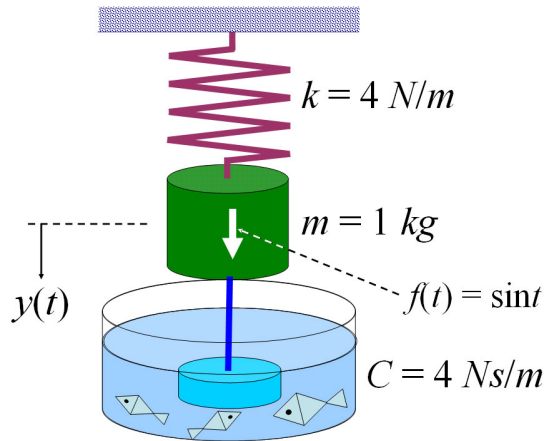


圖 2 以 Laplace 積分轉換解析偏微分方程式之觀念流程圖

範例一

試解析如下所示振動問題之數學模式：

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 1$$



其中 $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = \sin t$ 是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；

$y(0) = 0$ 表物體之初始位置為平衡位置； $\frac{dy(0)}{dt} = 1$ 指物體之向下初始速度為 1m/s 。本題是擬推求質量為 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$ 。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析。首先讓控制方程式乘以 e^{-st} ，再對變數 t 作 $[0, \infty)$ 之積分，亦即：

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y \right) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt$$

上式等號左邊可改寫為先積分再作相加之運算：

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2y}{dt^2} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} 4\frac{dy}{dt} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} 4y e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt$$

再進行部分積分 (*Integration by Part*，或譯為分佈積分) 之運算，此一運算是各個 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據方法，讀者若是初學者，請暫時接受以下所

示之結果。基於此，上式可改寫為：

$$\left[s^2 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt} \right] + 4 \left[s \int_0^{\infty} y e^{-st} dt - y(0) \right] + 4 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1}$$

再將問題之初始條件 $y(0) = 0$ 、 $\frac{dy(0)}{dt} = 1$ 代入上式，則可得：

$$\left[s^2 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt - 1 \right] + 4s \int_0^{\infty} y e^{-st} dt + 4 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1}$$

上式即為圖 1 所示解析流程圖中之第二個部分。經整理後，可得：

$$(s^2 + 4s + 4) \int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1} + 1 = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1}$$

亦即：

$$\int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)}$$

上式稱為問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，通常以符號 $Y(s)$ 表示之。也就是說，問題於 s 定義域之解為：

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)}$$

上式即為圖 1 所示解析流程圖中之第三個部分。以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行上式之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} Y(s) e^{st} ds$ ，但是此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，目前大部分的讀者都尚未學過複變分析，所以無能為力；二是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，這些公式，後續單元會逐一介紹，但這裏先將這 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式列出，如表 1 所示，以方便應用。

茲將 $Y(s) = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)}$ 化簡為簡單之部份分式，亦即考慮：

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)} = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4s + 4}$$

通分後，可得：

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)} = \frac{(a+c)s^3 + (4a+b+d)s^2 + (4a+4b+c)s + (4b+d)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)}$$

比較係數後可知：

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 4a + b + d = 1 \\ 4a + 4b + c = 0 \\ 4b + d = 2 \end{cases}$$

解析此聯立代數方程式可得： $a = -\frac{4}{25}$ 、 $b = \frac{3}{25}$ 、 $c = \frac{4}{25}$ 、 $d = \frac{38}{25}$ 。亦即：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)} \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{-4s + 3}{s^2 + 1} + \frac{4s + 38}{s^2 + 4s + 4} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{-4s}{s^2 + 1} + \frac{3}{s^2 + 1} + \frac{4s + 8 + 30}{s^2 + 4s + 4} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left[\frac{-4s}{s^2 + 1} + \frac{3}{s^2 + 1} + \frac{4(s+2)}{(s+2)^2} + \frac{30}{(s+2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{25} \left[\frac{-4s}{s^2 + 1} + \frac{3}{s^2 + 1} + \frac{4}{s+2} + \frac{30}{(s+2)^2} \right] \end{aligned}$$

因此問題於時間域 t 之解為：

$$y(t) = -\frac{4}{25} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} + \frac{3}{25} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} + \frac{4}{25} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + \frac{30}{25} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\}$$

由表 1 知， $L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} = \cos t$ ， $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \sin t$ ， $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = e^{-2t}$ ，

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = te^{-2t}$ ，故問題之解為：

$$y(t) = -\frac{4}{25}\cos t + \frac{3}{25}\sin t + \frac{4}{25}e^{-2t} + \frac{30}{25}te^{-2t}$$

上式即為此問題之解。

另解

本題亦可採用之前所介紹的方法求解，其步驟分為三部分。第一步是求出問題之齊性解 (Homogeneous Solution) $y_h(t)$ ；第二步是求出問題之非齊性解 (Non-homogeneous Solution)，也就是找出滿足非齊性項的特解 (Particular Solution) $y_p(t)$ 。根據第一步與第二步的解析結果，即可解出問題之通解 (General Solution) $y = y_h + y_p$ 。第三個步驟是將問題之初始條件代入通解中，用以求出滿足初始條件之特解。以下分別說明之。

步驟一 求齊性解

由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$ 解析問題之齊性解。考慮問題之齊性解與自然指數有關，亦即，令：

$$y_h = e^{\lambda t}$$

再代入齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$ 中，則：

$$\frac{d^2(e^{\lambda t})}{dt^2} + 4\frac{d(e^{\lambda t})}{dt} + 4(e^{\lambda t}) = 0$$

上式可化簡為：

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 4)e^{\lambda t} = 0$$

因為 $e^{2t} \neq 0$ ，故

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

上式稱為特徵方程式(*Characteristic Equation*)。由特徵方程式即可解出特徵根，分別為：

$$\lambda = -2, -2$$

因係屬重根情況，故問題之齊性解為：

$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

步驟二 求非齊性解

此刻，作者擬根據待定係數法求非齊性解。因問題之非齊性項為 $\sin t$ ，故依據待定係數法之基本原則(*Basic Rule*)，考慮問題之非齊性解 y_p 為：

$$y_p = A \cos t + B \sin t$$

再將 y_p 代回原常微分方程式：

$$\frac{d^2(A \cos t + B \sin t)}{dt^2} + 4 \frac{d(A \cos t + B \sin t)}{dt} + 4(A \cos t + B \sin t) = \sin t$$

則上式可表為：

$$(-A \cos t - B \sin t) + 4(-A \sin t + B \cos t) + 4(A \cos t + B \sin t) = \sin t$$

比較係數知：

$$\begin{cases} 3A + 4B = 0 \\ -4A + 3B = 1 \end{cases}$$

基於此，可解出 $A = -\frac{4}{25}$ 、 $B = \frac{3}{25}$ 。故非齊性解 y_p 為：

$$y_p = -\frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t$$

而通解 y 是齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的組合，亦即：

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} - \frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t$$

步驟三 求滿足初始條件的特解

已知問題之初始條件為： $y(0)=0$ 、 $\frac{dy(0)}{dt}=1$ 。這兩個初始條件剛好夠解出通解中之兩個未知常數 C_1 與 C_2 ，說明如下。茲將依據步驟一與步驟二所得出之通解代入初始條件中，則：

$$\begin{cases} 0 = C_1 e^{-2(0)} + C_2 (0) e^{-2(0)} - \frac{4}{25} \cos(0) + \frac{3}{25} \sin(0) \\ 1 = -2C_1 e^{-2(0)} + C_2 (1 - 2 \cdot 0) e^{-2(0)} + \frac{4}{25} \sin(0) + \frac{3}{25} \cos(0) \end{cases}$$

故 $C_1 = \frac{4}{25}$ 、 $C_2 = \frac{30}{25}$ ，因此滿足初始條件之特解為：

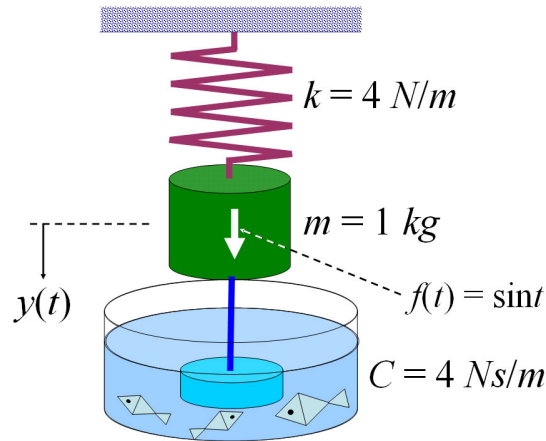
$$y = \frac{4}{25} e^{-2t} + \frac{30}{25} t e^{-2t} - \frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t$$

以上所求出之解與引用 *Laplace* 積分轉換方法所得出之解完全相同。

範例二

試解析如下所示振動問題之數學模式：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0$$



其中 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = \sin t$ 是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；

$y(0) = 0$ 表物體之初始位置為平衡位置； $\frac{dy(0)}{dt} = 0$ 指物體之向下初始速度為 0 m/s 。本題是擬推求質量為 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$ 。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析。首先讓控制方程式乘以 e^{-st} ，再對變數 t 作 $[0, \infty)$ 之積分，亦即：

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y \right) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt$$

上式等號左邊可改寫為先積分再作相加之運算：

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2 y}{dt^2} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} 4 \frac{dy}{dt} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} 4y e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt$$

再進行部分積分 (*Integration by Part*，或譯為分佈積分) 之運算，此一運算是各個 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據方法，讀者若是初學者，請暫時接受以下所

示之結果。基於此，上式可改寫為：

$$\left[s^2 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt} \right] + 4 \left[s \int_0^{\infty} y e^{-st} dt - y(0) \right] + 4 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1}$$

再將問題之初始條件 $y(0) = 0$ 、 $\frac{dy(0)}{dt} = 0$ 代入上式，則可得：

$$s^2 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt + 4s \int_0^{\infty} y e^{-st} dt + 4 \int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1}$$

上式即為圖 1 所示解析流程圖中之第二個部分。經整理後，可得：

$$(s^2 + 4s + 4) \int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1}$$

亦即：

$$\int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)}$$

上式稱為問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，通常以符號 $Y(s)$ 表示之。也就是說，問題於 s 定義域之解為：

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 4)}$$

上式即為圖 1 所示解析流程圖中之第三個部分。以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行上式之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} Y(s) e^{st} ds$ ，但是此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，目前大部分的讀者都尚未學過複變分析，所以無能為力；二是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，這些公式，後續單元會逐一介紹，但這裏先將這 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式列出，如表 1 所示，以方便應用。

茲將 $Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$ 化簡為簡單之部份分式，亦即考慮：

$$Y(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+4s+4)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4s+4}$$

通分後，可得：

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)} = \frac{(a+c)s^3 + (4a+b+d)s^2 + (4a+4b+c)s + (4b+d)}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$$

比較係數後可知：

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 4a+b+d=0 \\ 4a+4b+c=0 \\ 4b+d=1 \end{cases}$$

解析此聯立代數方程式可得： $a = -\frac{4}{25}$ 、 $b = \frac{3}{25}$ 、 $c = \frac{4}{25}$ 、 $d = \frac{13}{25}$ 。亦即：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)} \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{-4s+3}{s^2+1} + \frac{4s+13}{s^2+4s+4} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{-4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} + \frac{4s+8+5}{s^2+4s+4} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left[\frac{-4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} + \frac{4(s+2)}{(s+2)^2} + \frac{5}{(s+2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{25} \left[\frac{-4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} + \frac{4}{s+2} + \frac{5}{(s+2)^2} \right] \end{aligned}$$

因此問題於時間域 t 之解為：

$$y(t) = -\frac{4}{25} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} + \frac{3}{25} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} + \frac{4}{25} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + \frac{1}{5} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\}$$

由表 1 知， $L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} = \cos t$ ， $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} = \sin t$ ， $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = e^{-2t}$ ，

$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} = te^{-2t}$ ，故問題之解為：

$$y(t) = -\frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t + \frac{4}{25} e^{-2t} + \frac{1}{5} te^{-2t}$$

上式即為此問題之解。

另解

本題亦可採用之前所介紹的方法求解，其步驟分為三部分。第一步是求出問題之齊性解 (*Homogeneous Solution*) $y_h(t)$ ；第二步是求出問題之非齊性解 (*Non-homogeneous Solution*)，也就是找出滿足非齊性項的特解 (*Particular Solution*) $y_p(t)$ 。根據第一步與第二步的解析結果，即可解出問題之通解 (*General Solution*) $y = y_h + y_p$ 。第三個步驟是將問題之初始條件代入通解中，用以求出滿足初始條件之特解。以下分別說明之。

步驟一 求齊性解

由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$ 解析問題之齊性解。考慮問題之齊性解與自然指數有關，亦即，令：

$$y_h = e^{\lambda t}$$

再代入齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$ 中，則：

$$\frac{d^2(e^{\lambda t})}{dt^2} + 4\frac{d(e^{\lambda t})}{dt} + 4(e^{\lambda t}) = 0$$

上式可化簡為：

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 4)e^{\lambda t} = 0$$

因為 $e^{\lambda t} \neq 0$ ，故

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

上式稱為特徵方程式(*Characteristic Equation*)。由特徵方程式即可解出特徵根，分別為：

$$\lambda = -2, -2$$

因係屬重根情況，故問題之齊性解為：

$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

步驟二 求非齊性解

此刻，作者擬根據待定係數法求非齊性解。因問題之非齊性項為 $\sin t$ ，故依據待定係數法之基本原則(*Basic Rule*)，考慮問題之非齊性解 y_p 為：

$$y_p = A \cos t + B \sin t$$

再將 y_p 代回原常微分方程式：

$$\frac{d^2(A \cos t + B \sin t)}{dt^2} + 4\frac{d(A \cos t + B \sin t)}{dt} + 4(A \cos t + B \sin t) = \sin t$$

則上式可表為：

$$(-A \cos t - B \sin t) + 4(-A \sin t + B \cos t) + 4(A \cos t + B \sin t) = \sin t$$

比較係數知：

$$\begin{cases} 3A + 4B = 0 \\ -4A + 3B = 1 \end{cases}$$

基於此，可解出 $A = -\frac{4}{25}$ 、 $B = \frac{3}{25}$ 。故非齊性解 y_p 為：

$$y_p = -\frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t$$

而通解 y 是齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的組合，亦即：

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} - \frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t$$

步驟三 求滿足初始條件的特解

已知問題之初始條件為： $y(0) = 0$ 、 $\frac{dy(0)}{dt} = 0$ 。這兩個初始條件剛好夠解出通解中之兩個未知常數 C_1 與 C_2 ，說明如下。茲將依據步驟一與步驟二所得出之通解代入初始條件中，則：

$$\begin{cases} 0 = C_1 e^{-2(0)} + C_2 (0) e^{-2(0)} - \frac{4}{25} \cos(0) + \frac{3}{25} \sin(0) \\ 0 = -2C_1 e^{-2(0)} + C_2 (1 - 2 \cdot 0) e^{-2(0)} + \frac{4}{25} \sin(0) + \frac{3}{25} \cos(0) \end{cases}$$

故 $C_1 = \frac{4}{25}$ 、 $C_2 = \frac{1}{5}$ ，因此滿足初始條件之特解為：

$$y = \frac{4}{25} e^{-2t} + \frac{1}{5} t e^{-2t} - \frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t$$

以上所求出之解與引用 *Laplace* 積分轉換方法所得出之解完全相同。

表 1 常用之 17 個 Laplace 積分轉換暨反轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0) = s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2 \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ 其中 $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at} f(t)$	$F(s-a) = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t} dt$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s) = e^{-as} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s) = \left[\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right] \left[\int_0^\infty g(t)e^{-st} dt \right]$