提要 142：*Laplace* 積分轉換與反轉換之定義的由來

Laplace 先生是法國數學家，*Laplace* 積分轉換是由 *Fourier* 積分轉換而來，而 *Fourier* 積分轉換是由 *Fourier* 級數而來。因此，若欲完全瞭解 *Laplace* 積分轉換與反轉換之定義，必須弄懂 *Fourier* 級數的觀念。Fourier 級數是另一個單元的主題，通常在介紹 *Laplace* 轉換時是不會有老師想要介紹的，但爲了滿足讀者的好奇心，作者擬簡要介紹之。

❶ 週期爲 2π 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 級數

由定理知，任意週期爲 2π 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 級數均可表爲：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{1}$$

其中 $a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$、$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$、$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$。

❷ 週期爲 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 級數

函數 $f(x)$ 之週期若爲 $2L$，則任意週期爲 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 級數均可表爲：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2}$$

其中 $a_0=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)dx$、$a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$、$b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$。式(2)可由式(1)證得，因較容易，暫時略過不題。

❸ 週期爲 ∞ 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 積分

若考慮函數 $f(x)$ 之週期 L 爲 ∞，則可將變數 n 改寫爲變數 ω，亦即令

$\omega = \dfrac{n\pi}{L}$，而 ω 的微小變化量為 $\Delta\omega = \dfrac{(n+1)\pi}{L} - \dfrac{n\pi}{L} = \dfrac{\pi}{L}$。因 $L \to \infty$，所以：

$$a_0 = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \left(\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\right)\left[\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)dx\right] = \left(\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\right)[\text{有限值}] = 0$$

$$a_n = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx = \frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v\,dv$$

$$b_n = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx = \frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v\,dv$$

故

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\omega x + b_n\sin\omega x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v\,dv\right]\cos\omega x + \left[\frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v\,dv\right]\sin\omega x\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v\,dv\right]\cos\omega x + \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v\,dv\right]\sin\omega x\right\}\frac{\Delta\omega}{\pi} \\
&= \int_{0}^{\infty}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v\,dv\right]\cos\omega x + \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v\,dv\right]\sin\omega x\right\}\frac{d\omega}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos\omega v\cos\omega x + \sin\omega v\sin\omega x)dv\right\}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos[\omega(v-x)]dv\right\}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\infty} f(v)\cos[\omega(v-x)]d\omega\right\}dv
\end{aligned}$$

現在，內層之積分係對變數 ω 作積分，而與變數 ω 相關之待積分函數僅 $\cos[\omega(v-x)]$，$f(v)$ 並不影響變數 ω 之積分過程；又 $\cos[\omega(v-x)]$ 是偶函數(*Even Function*)，所以 $\int_{0}^{\infty} f(v)\cos[\omega(v-x)]d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos[\omega(v-x)]d\omega$。基於此，週期 L 為 ∞ 之函數 $f(x)$ 可表為：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos[\omega(v-x)]d\omega\right\}dv \qquad (3)$$

上式必須再略作調整，以引進自然指數函數。

對變數 ω 而言，$\sin[\omega(v-x)]$ 是奇函數(*Odd Function*)，且 $f(v)\sin[\omega(v-x)]$ 仍是奇函數，也就是說這是反對稱函數。反對稱函數作一個對稱區域的積分時，會得到一塊正的面積與一塊負的面積，故其面積之和爲零。基於此，$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin[\omega(v-x)]d\omega = 0$；將積分值爲零的積分式繼續作其他的積分、並乘上任意數或除以任意不是零的數，其值仍爲零，亦即：

$$i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin[\omega(v-x)]d\omega\right\}dv = 0 \tag{4}$$

引用式(4)，可將式(3)改寫爲：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos[\omega(v-x)]d\omega\right\}dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos[\omega(v-x)]d\omega\right\}dv + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin[\omega(v-x)]d\omega\right\}dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\{\cos[\omega(v-x)] + i\sin[\omega(v-x)]\}d\omega\, dv
\end{aligned}$$

由尤拉公式(*Euler Formula*)知，$e^{ix} = \cos x + i\sin x$，故上式可繼續化簡爲：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(v-x)}d\omega\, dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}e^{-i\omega x}dv\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv\right]e^{-i\omega x}d\omega
\end{aligned}$$

亦即週期爲 ∞ 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 級數已呈積分型態，故應將其稱爲 *Fourier* 積分。茲令：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv$$

則週期爲 ∞ 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 積分爲：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \qquad (5)$$

其中$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{i\omega v}dv$。

❹ 由 *Fourier* 積分至 *Laplace* 積分轉換

已知週期爲∞之函數$f(x)$的 *Fourier* 積分爲$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$，其中$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{i\omega v}dv$。爲方便起見，在這裏，先定義兩個專有名詞，說明如下。

- $f(x)$之 *Fourier* 積分轉換

關於$f(x)$之 *Fourier* 積分轉換之定義，可直接將$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{i\omega v}dv$中之變數$v$改寫爲變數$x$，在積分上下限是確定的情況下，換掉積分變數並不會影響積分值。基於此，可知$f(x)$之 *Fourier* 積分轉換之定義爲：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx \qquad (6)$$

- $F(\omega)$之 *Fourier* 積分反轉換

觀察式(5)，即可得知$F(\omega)$之 *Fourier* 積分反轉換應定義爲：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \qquad (7)$$

有了 *Fourier* 積分轉換與反轉換的定義，再來看看 *Laplace* 積分轉換是什麼，首先定義與時間變數t相關之問題。茲將式(6)中之變數x改寫爲變數t，並考慮函數$f(t)$僅在$t\geq 0$時有函數值，當$t<0$時，$f(t)=0$，故式(6)可改寫爲：

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx\\&\equiv\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{0}(0)e^{i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt\\&=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt\end{aligned}$$

若再令 $f(t)=g(t)e^{-\alpha t}$ ，則與式(6)相關之上式可繼續化簡爲：

$$F(\omega)=\int_0^\infty g(t)e^{-\alpha t}\,e^{i\omega t}dt=\int_0^\infty g(t)e^{(i\omega-\alpha)t}dt \tag{8}$$

再令 $-s=i\omega-\alpha$ ，且 $F(\omega)\equiv G(s)$，則式(8)可表爲：

$$\boxed{G(s)=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt} \tag{9}$$

上式即爲函數 $g(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換。

以下思考 $G(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換。因爲 $-s=i\omega-\alpha$ 或 $s=\alpha-i\omega$，所以 $d\omega=-\frac{1}{i}ds$ ；又當 $\omega=-\infty$ 時， $s=\alpha+i\infty$ ；當 $\omega=\infty$ 時， $s=\alpha-i\infty$ 。基於此，同時將變數 x 改寫爲變數 t ，則式(7)可表爲：

$$\begin{aligned}
g(t)e^{-\alpha t}&=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty}G(s)e^{-i[-i(\alpha-s)]t}\left(-\frac{1}{i}ds\right)\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty}G(s)e^{-(\alpha-s)t}ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}G(s)e^{-\alpha t}e^{st}ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}G(s)e^{st}ds\,e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

上式等號左右兩端都有乘以 $e^{-\alpha t}$ ，故上式除以 $e^{-\alpha t}$ ，即可得知 $G(s)$ 之 *Laplace* 積分反轉換爲：

$$\boxed{g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}G(s)e^{st}ds} \tag{10}$$

重新再作一次整理如下：

表 1　兩種級數和兩種積分轉換

級數&轉換 / 四種函數	兩種 *Fourier* 級數與兩種積分反轉換	兩種級數的係數或兩種積分轉換
週期為 2π 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 級數	$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$	$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$
週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 級數	$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$	$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L}f(x)\cos nx\,dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L}f(x)\sin nx\,dx$
週期為 ∞ 之函數 $f(x)$ 的 *Fourier* 積分	$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{i\omega x}dx$
週期為 ∞ 之函數 $g(t)$、$t\geq 0$ 的 *Laplace* 積分轉換	$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}G(s)e^{st}ds$	$G(s)=\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt$

附註：

1. Laplace 先生的全名為 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)，其畫像如以下所示：

註：摘自網路 http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

2. Laplace 先生在學術上有許多的大成就，他曾說過：「我們所知甚少，不知道的卻甚多」。Laplace 先生認為數學是科學的重要工具，故學好數學非常有助於各領域之科學研究。