

## 提要 139：與 Bessel 函數有關之基本積分式

有一些與 Bessel 函數有關之基本積分公式是會用到的。土木科系背景的讀者並不必去瞭解它們是怎麼推導出來的，因為沒看過土木工程研究所有考過相關例題；但是其他科系之研究所考試就有可能會出這一類的考題了。筆者從事土木類的研究工作經驗中，仍會使用這些與 Bessel 函數相關之積分式，為方便查考起見，仍將其整理出來，如表 1 所示。

表 1 與 Bessel 函數相關之基本積分公式

編號	積分式型態	積分結果
1	$\int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx$	$x^\nu J_\nu(x) + C$
2	$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx$	$-x^{-\nu} J_\nu(x) + C$
3	$\int J_{\nu+1}(x) dx$	$\int J_{\nu-1}(x) dx - 2J_\nu(x)$

註：

- $\int x J_0(ax) dx = \frac{x}{a} J_1(ax)$
- $\int x^3 J_0(ax) dx = \frac{2x^2}{a^2} J_2(ax) - \frac{x^3}{a} J_3(ax)$
- $\int x^5 J_0(ax) dx = \frac{4x^4}{a^2} \left(1 - \frac{8}{a^2 x^2}\right) J_0(ax) + \frac{x^5}{a} \left(1 - \frac{16}{a^2 x^2} + \frac{48}{a^4 x^4}\right) J_1(ax)$
- $\int_0^R x^3 J_0(ax) dx = \frac{R^2}{a^2} [2J_2(aR) - aR J_3(aR)]$
- $\int x^3 J_0(x) dx = x^2 [2J_2(x) - x J_3(x)]$