

提要 137：Hankel 轉換之定義

Hankel 轉換(*Transform*)是解析微分方程式的好方法之一，只要自變數之定義範圍是 $[0, \infty)$ ，則微分方程式即可以 *Hankel* 轉換加以處理。*Hankel* 轉換之定義如下所示。

定義：Hankel 轉換

函數 $f(x)$ 作 ν 階之 *Hankel* 轉換係定義為：

$$F(\xi) = \int_0^{\infty} x f(x) J_{\nu}(\xi x) dx, \quad x \in [0, \infty)$$

經過這種運算過後之函數 $f(x)$ ，常以一與原函數相關之符號 $F(\xi)$ 加以表示。因 *Hankel* 轉換過程中，與 x 相關之自變數均需代入積分式之上下限，故變數 x 會消失不見，僅留下參數 ξ 。其反轉換則定義為：

$$f(x) = \int_0^{\infty} \xi F(\xi) J_{\nu}(\xi x) d\xi, \quad \xi \in [0, \infty)$$

筆者使用 *Hankel* 轉換解析工程問題的機會相當多，茲略述相關之使用心得：

1. 在解析數學模式時，可將座標系統改寫為 (r, θ, z) 座標系統，因其中之變數 $r \geq 0$ ，故可針對數學模式中之變數 r 作 *Hankel* 轉換。
2. *Hankel* 轉換所需之積分公式是不用背下來的，只需使用相關之數學使用手冊即可。
3. *Hankel* 轉換最困難的關鍵是其反轉換部分，這情況與 *Laplace* 轉換相似。