提要 135：*Bessel* 函數之基本微分關係式

有一些與 *Bessel* 函數有關之基本積分公式是會用到的。土木科系背景的讀者並不必去瞭解它們是怎麼推導出來的，因爲沒看過土木工程研究所有考過相關例題；但是其他科系之研究所考試就有可能會出這一類的考題了。筆者從事土木類的研究工作經驗中，仍會使用這些與 *Bessel* 函數相關之積分式，爲方便查考起見，仍將其整理出來，如表 1 所示。

表 1　與 *Bessel* 函數相關之基本微分公式

編號	微分式型態	微分結果
1	$\dfrac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]$	$x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$
2	$\dfrac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right]$	$-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$
3	$2\dfrac{d}{dx}\left[J_{\nu}(x)\right]$	$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)$

註：

1. $x^{\nu}J_{\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$

2. $x^{-\nu}J_{\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$

3. $J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_{\nu}'(x)$

4. $J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)$

範例一
試求 $J_2(1)$ 與 $J_3(1)$ 之值。

解答：

• $J_2(1)$之值

已知 $J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x)$，所以當 $\nu=1$ 時，前式可改寫爲：

$$J_0(x)-J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)$$

故：

$$J_2(x)=J_0(x)-\frac{2}{x}J_1(x)$$

因此，當 $x=1$ 時：

$$J_2(1)=J_0(1)-2J_1(1)$$

只要知道 $J_0(1)$ 與 $J_1(1)$ 可以查表得出其值，則 $J_2(1)$ 亦可算出其值。

• $J_3(1)$之值

已知 $J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x)$，所以當 $\nu=2$ 時，前式可改寫爲：

$$J_1(x)-J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)$$

故：

$$J_3(x)=J_1(x)-\frac{4}{x}J_2(x)$$

又 $J_2(x)=J_0(x)-\frac{2}{x}J_1(x)$ ，所以：

$$J_3(x)=J_1(x)-\frac{4}{x}\left[J_0(x)-\frac{2}{x}J_1(x)\right]=-\frac{4}{x}J_0(x)+\left(1+\frac{8}{x^2}\right)J_1(x)$$

因此，當 $x=1$時：

$$J_3(1)=-4J_0(1)+9J_1(1)$$

只要知道 $J_0(1)$與 $J_1(1)$可以查表得出其值，則 $J_3(1)$亦可算出其值。

範例二
試求 $J_0(x)$ 與 $J_1(x)$。

解答：

- $J_0(x)$

因爲 $J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!2^{2m+\nu}}x^{2m+\nu}$，所以當 $\nu=0$ 時，$J_\nu(x)$ 可改寫爲：

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!m!2^{2m}}x^{2m}$$

$$\Rightarrow J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!m!2^{2m}}x^{2m}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_0(x)=1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2304}x^6+-\cdots}$$

- $J_1(x)$

因爲 $J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!2^{2m+\nu}}x^{2m+\nu}$，所以當 $\nu=1$ 時，$J_\nu(x)$ 可改寫爲：

$$J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!2^{2m+1}}x^{2m+1}$$

$$\Rightarrow J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!2^{2m+1}}x^{2m+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{384}-\frac{x^7}{18432}+-\cdots}$$

註：

1. $J_0\left(x\right)=1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2304}x^6+-\cdots$
2. $J_1\left(x\right)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{384}-\frac{x^7}{18432}+-\cdots$
3. $J_0\left(0\right)=1$
4. $J_1\left(0\right)=0$
5. $J_\nu\left(x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m}{m!\left(m+\nu\right)!2^{2m+\nu}}x^{2m+\nu}$