提要 134：貝色方程式(*Bessel Equation*)之通解

貝色方程式(*Bessel Equation*)是定義爲：$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$，其中 $\nu\geq 0$。這種方程式之通解(*General Solution*)的推導非常麻煩，因需以 *Frobenius* 解法一步步解析問題。首先考慮問題之解爲 $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}$，然後代回原式，再推導出其中之 r 值與係數 a_0、a_1、a_2、a_3、…等間彼此之關係。其過程相當麻煩！還好的是，因爲這種問題之通解有其規律性，故可以根據其通解之規律特性作歸納整理，最後發展成一個定理。以下就是這個定理的說明。

定理：貝色方程式(*Bessel Equation*)之通解
貝色方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$、$\nu\geq 0$ 之通解爲 $y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$，其中 C_1、C_2 爲任意常數，$J_\nu(x)$ 與 $Y_\nu(x)$ 分別爲 ν 階之第一種類型與第二種類型的貝色函數(*Bessel Function*)。

有了上面這個定理後，解貝色方程式就不再有任何困擾了。但是若想知道特定之變數 x 與 ν 值所對應之 $J_\nu(x)$ 與 $Y_\nu(x)$ 的函數值，問題就又變得有點麻煩了！因必須去找數學使用手冊或執行套裝軟體程式，才有辦法求出 $J_\nu(x)$ 與 $Y_\nu(x)$ 之函數值。與貝色函數相關之使用手冊排在一起時是非常壯觀的，讀者若有興趣，可在圖書館中找找看，就會相信我的話了。

範例一
試求微分方程式 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$ 之解。

解答：

• 擬根據 *Frobenius* 解法求通解

擬先由廣義型式之 *Bessel* 方程式的通解討論之。令問題之解爲：

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$ ，則：

$$\begin{aligned} & x^2 \left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right)'' \\ & + x\left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right)' \\ & + \left(x^2 - \nu^2\right)\left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right)'' + x\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right)' + \left(x^2 - \nu^2\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right) = 0 \tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned} & x^2 \left[r(r-1) a_0 x^{r-2} + a_1 (r+1) r x^{r-1} + a_2 (r+2)(r+1) x^r + \cdots\right] \\ & + x\left[r a_0 x^{r-1} + a_1 (r+1) x^r + a_2 (r+2) x^{r+1} + \cdots\right] \\ & + \left(x^2 - \nu^2\right)\left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right) = 0 \end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$
\begin{array}{llllll}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots \\
+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots \\
 & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots \\
-\nu^2a_0x^r & -\nu^2a_1x^{r+1} & -\nu^2a_2x^{r+2} & -\nu^2a_3x^{r+3} & -\cdots=0
\end{array}
$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
r(r-1)a_0+a_0r-\nu^2a_0=0 \\
(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\nu^2a_1=0 \\
(r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0-\nu^2a_2=0 \\
(r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1-\nu^2a_3=0 \\
(r+4)(r+3)a_4+(r+4)a_4+a_2-\nu^2a_4=0 \\
\qquad\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式可再整理爲：

$$
\begin{cases}
\left(r^2-\nu^2\right)a_0=0 & (2a) \\
(r+1)^2a_1-\nu^2a_1=0 & (2b) \\
\left[(r+2)^2-\nu^2\right]a_2+a_0=0 & (2c) \\
\left[(r+3)^2-\nu^2\right]a_3+a_1=0 & (2d) \\
\left[(r+4)^2-\nu^2\right]a_4+a_2=0 & (2e) \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由 *Frobenius* 定理知， $a_0\neq 0$ ，故式(2*a*)應改寫爲：

$$
r^2-\nu^2=0
$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$
\boxed{r=\nu,-\nu}
$$

➊ 當 $r=\nu$ 時

因 $r=\nu$，故式(2b)-(2e)可改寫為：

$$\begin{cases}(\nu+1)^2 a_1-\nu^2 a_1=0 & (2b') \\ \left[(\nu+2)^2-\nu^2\right]a_2+a_0=0 & (2c') \\ \left[(\nu+3)^2-\nu^2\right]a_3+a_1=0 & (2d') \\ \left[(\nu+4)^2-\nu^2\right]a_4+a_2=0 & (2e') \\ \quad\vdots \end{cases}$$

由式(2b’)知 $(2\nu+1)a_1=0$，因為考慮 $\nu\geq 0$，所以：

$$\boxed{a_1=0}$$

將 $a_1=0$ 代入式(2d’)，則由式(2d’)可得：

$$\boxed{a_3=0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1=a_3=a_5=\cdots=0}$ 之結果。另外由式(2c’)，可知 $2(2\nu+2)a_2+a_0=0$，故：

$$\boxed{a_2=-\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0}$$

再將 $a_2=-\dfrac{1}{2^2(\nu+1)}a_0$ 之結果代入式(2e’)，則式(2e’)需調整為：

$$\left[(\nu+4)^2-\nu^2\right]a_4+a_2=0$$

$$\Rightarrow \left[(\nu+4)^2-\nu^2\right]a_4-\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0=0$$

$$\Rightarrow \left[(\nu+4+\nu)(\nu+4-\nu)\right]a_4-\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0=0$$

$$\Rightarrow \left[(2\nu+4)(4)\right]a_4-\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0=0$$

$$\Rightarrow\ 8(\nu+2)\,a_4-\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_4=\frac{1}{2^2(8)(\nu+1)(\nu+2)}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned}y(x)&=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\\&=a_0x^\nu-\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0x^{\nu+2}+\frac{1}{2^2(8)(\nu+1)(\nu+2)}a_0x^{\nu+4}+\cdots\\&=a_0x^\nu\left[1-\frac{1}{2^2(\nu+1)}x^2+\frac{1}{2^2(8)(\nu+1)(\nu+2)}x^4+\cdots\right]\end{aligned}\tag{3}$$

其中之係數 a_0 可選擇：

$$\boxed{a_0=\frac{1}{2^\nu\nu!}}$$

故式(3)可表爲：

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{2^\nu\nu!}x^\nu\left[1-\frac{1}{2^2(\nu+1)}x^2+\frac{1}{2^2(8)(\nu+1)(\nu+2)}x^4+\cdots\right]}\tag{3'}$$

或

$$\boxed{y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!2^{2m+\nu}}x^{2m+\nu}}\tag{3''}$$

上式即定義爲ν階之第一種類型的貝色函數(*Bessel Function of the First Kind of Order* ν) $J_\nu(x)$，即：

$$\boxed{J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!2^{2m+\nu}}x^{2m+\nu}} \qquad (3''')$$

❷ 當 $r=-\nu$ 時

這一部分的解析有些類似，然而需考慮較多的情況，故其解析過程暫時省略之，僅列出結果，如以下所示。

(1) 當 ν 爲整數時，另一獨立解爲 $\boxed{J_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)!2^{2m-\nu}}x^{2m-\nu}}$，故問題之通解爲 $\boxed{y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)}$。

(2) 當 ν 非爲整數時，另一獨立解爲 $\boxed{Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin(\nu\pi)}\left[J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)\right]}$，故問題之通解爲 $\boxed{y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)}$。