

提要 133：各種類型之 *Bessel* 函數的定義

貝色函數(*Bessel Function*)有許多種不同的類型，如有稱爲 ν 階之第一種類型的貝色函數(*Bessel Function of the First Kind of Order ν*) $J_\nu(x)$ ， ν 階之第二種類型的貝色函數(*Bessel Function of the Second Kind of Order ν*) $Y_\nu(x)$ ， ν 階之第三種類型的貝色函數(*Bessel Function of the Third Kind of Order ν*)或第一種與第二種 *Hankel* 函數(*The First and Second Hankel Functions*) $H_\nu^{(1)}(x)$ 與 $H_\nu^{(2)}(x)$ ，又有稱爲 ν 階之第一種修正類型的貝色函數(*Modified Bessel Function of the First Kind of Order ν*) $I_\nu(x)$ ， ν 階之第二種修正類型的貝色函數(*Modified Bessel Function of the Second Kind of Order ν*) $K_\nu(x)$ 等。其詳細定義說明如下。

各種類型之 *Bessel* 函數的定義

1. ν 階之第一種類型的貝色函數 $J_\nu(x)$ 定義爲：

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

2. ν 階之第二種類型的貝色函數 $Y_\nu(x)$ 定義爲：

$$Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_\nu(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^\nu}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m + h_{m+\nu})}{2^{2m+\nu} m! (m+\nu)!} x^{2m} - \frac{x^{-\nu}}{\pi} \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-m-1)!}{2^{2m-\nu} m!} x^{2m}$$

其中 $h_0 = 0$ ， $h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s}$ ； $\gamma = 0.57721566490\dots$ 。

3. ν 階之第三種類型的貝色函數 $H_\nu^{(1)}(x)$ 與 $H_\nu^{(2)}(x)$ ，亦稱爲第一個 *Hankel* 函數及第二個 *Hankel* 函數，其定義如以下所示。

❶ 第一個 *Hankel* 函數 $H_\nu^{(1)}(x)$ 定義爲： $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$

❷ 第二個 *Hankel* 函數 $H_\nu^{(2)}(x)$ 定義爲： $H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x)$

4. ν 階之第一種修正類型的貝色函數 $I_\nu(x)$ 定義爲：

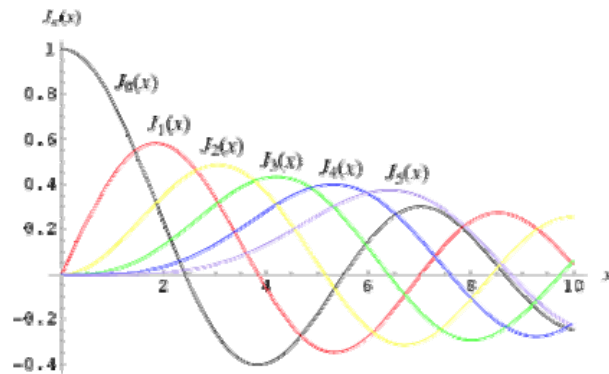
$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

5. ν 階之第二種修正類型的貝色函數 $K_\nu(x)$ 定義爲：

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]$$

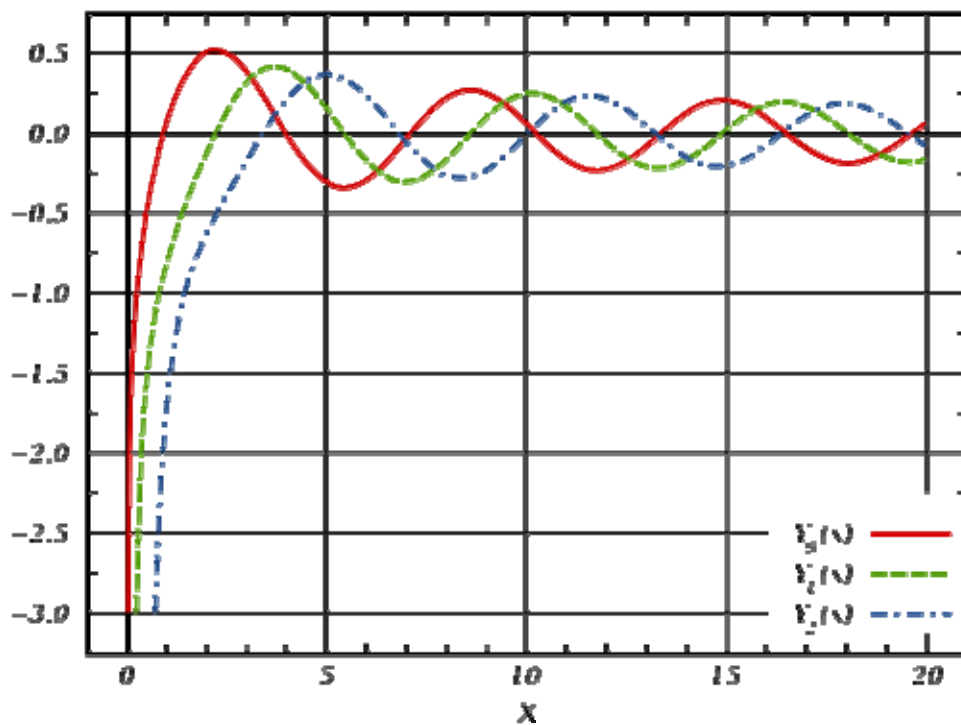
附註：

1. ν 階之第一種類型的貝色函數(Bessel Function of the First Kind of Order ν) $J_\nu(x)$ 的圖形如以下所示：



註：摘自網路 <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>

2. ν 階之第二種類型的貝色函數(Bessel Function of the Second Kind of Order ν) $Y_\nu(x)$ 的圖形如以下所示：



註：摘自網路

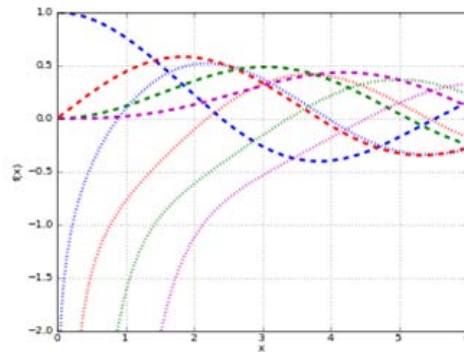
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bessel_Functions_\(2nd_Kind,_n%3D0,1,2\).svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bessel_Functions_(2nd_Kind,_n%3D0,1,2).svg)

3. ν 階之第三種類型的貝色函數(*Bessel Function of the Third Kind of Order ν*) $H_\nu^{(1)}(x)$ 、 $H_\nu^{(2)}(x)$ 與 $J_\nu(x)$ 、 $Y_\nu(x)$ 的關係如下：

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x)$$

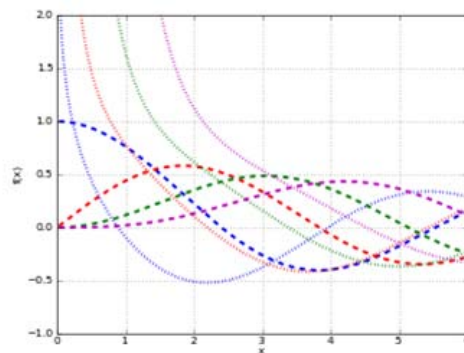
$H_\nu^{(1)}(x)$ 之函數圖形如下：



註：摘自網路

http://mpmath.googlecode.com/svn/trunk/doc/build/_images/hankel1.png

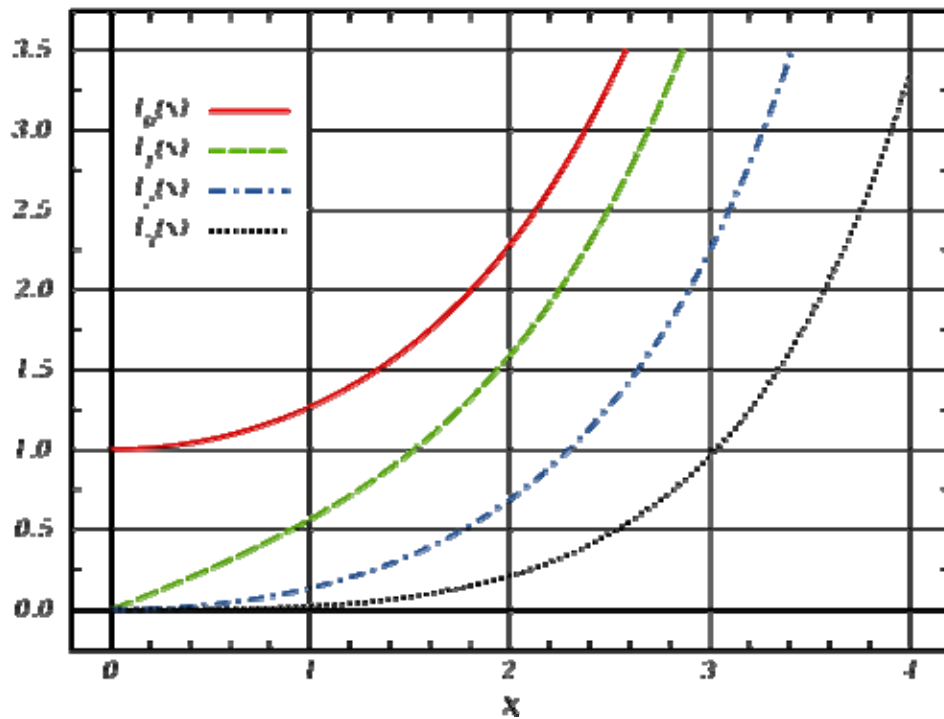
$H_\nu^{(2)}(x)$ 之函數圖形如下：



註：摘自網路

http://mpmath.googlecode.com/svn/trunk/doc/build/_images/hankel2.png

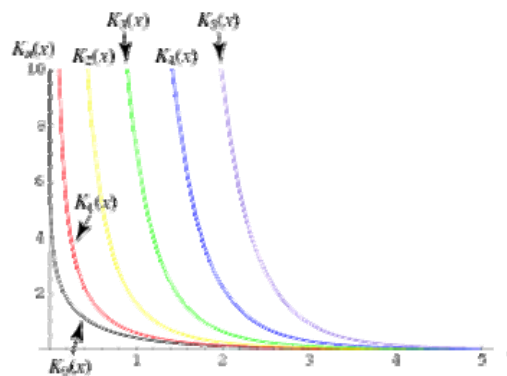
4. ν 階之第一種修正類型的貝色函數(*Modified Bessel Function of the First Kind of Order ν*) $I_\nu(x)$ 的圖形如以下所示：



註：摘自網路

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bessell_Functions_\(1st_Kind,_n%3D0,1,2,3\).svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bessell_Functions_(1st_Kind,_n%3D0,1,2,3).svg)

5. ν 階之第二種修正類型的貝色函數(*Modified Bessel Function of the Second Kind of Order ν*) $K_\nu(x)$ 的圖形如以下所示：



註：摘自網路

<http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheSecondKind.html>