提要 132：*Gamma* 函數之函數值及特殊關係

Gamma 函數 $\Gamma(\nu)$ 函數之定義爲：$\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt$ ，其中 $\nu>0$ 。*Gamma* 函數有一些特殊值及特殊關係，也許各類的考試不會考，但讀者若有機會以數學模式解析軸對稱之工程等問題時，一定得多少懂一點 *Gamma* 函數，也需多少知道 *Gamma* 函數之特殊函數值及特殊關係式，說明如下。

Gamma 函數之特殊函數值
Gamma 函數之特殊函數值爲： $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ，$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$ ，$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1!$ ，$\Gamma(3)=2!$

Gamma 函數之特殊關係式
Gamma 函數之特殊關係式爲： $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$ ，$\Gamma(n+1)=n!$

註：

1. $\Gamma(1)=0!=1$
2. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
3. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
4. $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
5. $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)=\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}\frac{15\sqrt{\pi}}{8}=\frac{105\sqrt{\pi}}{16}$
6. $\dfrac{d^n\Gamma(x)}{dx^n}=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\,dt$

7. $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$

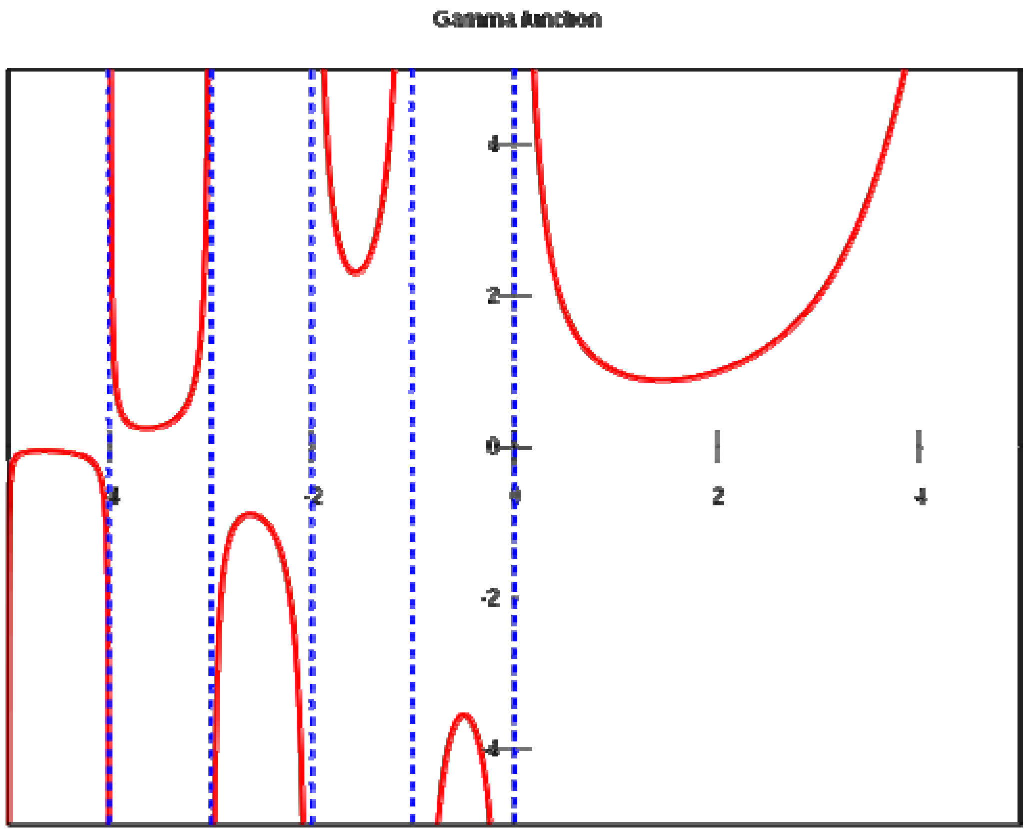
8. $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)=(2\pi)^{(m-1)/2}\,m^{1/2-mx}\,\Gamma(mx)$

9. $\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

10. $\Gamma(n)=(n-1)!$

11. $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$

12. *Gamma* 函數的圖形如以下所示



註：本圖取自網際網路 http://en.wikipedia.org/wiki/File:Gamma_plot.svg。