提要 130：*Frobenius* 解法在 *Bessel* 方程式的應用---案例 3(*a*)，$r_1 \neq r_2$，$r_1 - r_2 =$ 整數，通解不含 $\ln x$ 項 ($\nu = 1/2, 3/2, \ldots, 1, 2, \ldots$)

所討論之 *Bessel* 方程式是 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$，其中 $\nu = 1/2, 3/2, 5/2, \cdots, 1, 2, 3, \cdots$。筆者擬先將 *Frobenius* 解法所可能面對的三種案例、四種情況先整理出來，再針對第三種案例之情況(a)以範例加以詳細說明。

定理：以 *Frobenius* 解法解析 *Bessel* 方程式
之前的 *Indicial* 方程式 $r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$ 現在可表爲 $(r-\nu)(r+\nu) = 0$，因此，之前的兩個根 r_1、r_2 分別爲 $r_1 = \nu$ 及 $r_2 = -\nu$，其中 $\nu \geq 0$。 案例 1. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 \neq$ 整數，即 $\nu \neq 0$、1、2、3、…、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、… $$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = J_{-\nu}(x) \end{cases}$$ 案例 2. $r_1 = r_2 = r$，即 $\nu = 0$ $$\begin{cases} y_1 = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_0(x) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = Y_0(x) \end{cases}$$ 案例 3. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 =$ 整數，即 $\nu = \frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、…、1、2、3、… 情況(a)：不含 $\ln x$ 項 $$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = J_{-\nu}(x) \end{cases}$$ 情況(b)：含 $\ln x$ 項 $$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = Y_\nu(x) \end{cases}$$

註：雖然有三種案例四種情況，但 *Bessel* 方程式 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$ 之通解一定可表爲 $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$，其中 $J_\nu(x)$ 與 $Y_\nu(x)$ 分別爲 ν 階之第一種與第二種 *Bessel* 函數。以下擬針對案例 3(a)之情況，以範例加以說明。

範例一
試求微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ 之解。

解答：

這個題目是屬於案例 3(a)之情況，因爲本題所解得的特徵根 $r_1=-\dfrac{1}{2}$ 、$r_2=\dfrac{1}{2}$，即 $r_1\neq r_2$，且 $r_1-r_2=$ 整數。以下擬以兩種解法推求出問題之通解(General solution)。

• 解法一：根據定理求通解

Bessel 方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$ 之通解爲 $y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$。現在 $\nu=\dfrac{1}{2}$，故問題之通解爲：

$$\boxed{y=C_1J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2Y_{\frac{1}{2}}(x)}$$

• 解法二：根據 *Frobenius* 解法求通解

令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&+\left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right)'' + x\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right)' + \left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right) = 0 \qquad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}
&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2} + a_1(r+1)rx^{r-1} + a_2(r+2)(r+1)x^r + \cdots\right] \\
&\quad + x\left[ra_0x^{r-1} + a_1(r+1)x^r + a_2(r+2)x^{r+1} + \cdots\right] \\
&\quad + \left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots\right) = 0
\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{ccccc}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots \\
+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots \\
 & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots \\
-\tfrac{1}{4}a_0x^r & -\tfrac{1}{4}a_1x^{r+1} & -\tfrac{1}{4}a_2x^{r+2} & -\tfrac{1}{4}a_3x^{r+3} & -\cdots = 0
\end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互為線性獨立，且其和為零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}
r(r-1)a_0 + a_0r - \tfrac{1}{4}a_0 = 0 \\
(r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \tfrac{1}{4}a_1 = 0 \\
(r+2)(r+1)a_2 + (r+2)a_2 + a_0 - \tfrac{1}{4}a_2 = 0 \\
(r+3)(r+2)a_3 + (r+3)a_3 + a_1 - \tfrac{1}{4}a_3 = 0 \\
(r+4)(r+3)a_4 + (r+4)a_4 + a_2 - \tfrac{1}{4}a_4 = 0 \\
\qquad\qquad\vdots
\end{cases}$$

上式可再整理為：

$$
\begin{cases}
\left(r^2-\frac{1}{4}\right)a_0=0 & (2a)\\
(r+1)^2a_1-\frac{1}{4}a_1=0 & (2b)\\
\left[(r+2)^2-\frac{1}{4}\right]a_2+a_0=0 & (2c)\\
\left[(r+3)^2-\frac{1}{4}\right]a_3+a_1=0 & (2d)\\
\left[(r+4)^2-\frac{1}{4}\right]a_4+a_2=0 & (2e)\\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故式(2*a*)應改寫爲：

$$r^2-\tfrac{1}{4}=0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r=1/2,\ -1/2}$$

一般而言，先討論 *r* 值較大的情況下， a_0 、a_1 、a_2 、a_3 、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r=1/2$ 的情況，然後再說明 $r=-1/2$ 的情況。

❶ 當 $r=1/2$ 時

因 $r=1/2$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫爲：

$$
\begin{cases}
\left(\frac{1}{2}+1\right)^2a_1-\frac{1}{4}a_1=0 & (2b')\\
\left[\left(\frac{1}{2}+2\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_2+a_0=0 & (2c')\\
\left[\left(\frac{1}{2}+3\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_3+a_1=0 & (2d')\\
\left[\left(\frac{1}{2}+4\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_4+a_2=0 & (2e')\\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由式(2*b*’)知：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將 $a_1 = 0$ 代入式(2*d*’)，則由式(2*d*’)可得：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$ 之結果。另外由式(2*c*’)，可知：

$$6a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{6}a_0}$$

再將 $a_2 = -\frac{1}{6}a_0$ 之結果代入式(2*e*’)，則式(2*e*’)需調整爲：

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}+4\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right]a_4 - \frac{1}{6}a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{1}{120}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\ &= a_0 x^{1/2} - \frac{1}{6}a_0 x^{5/2} + \frac{1}{120}a_0 x^{9/2} + \cdots \\ &= a_0 x^{-1/2}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right) \end{aligned}$$

由 *Taylor* 級數展開觀念知：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots$$

故問題之第一個解為：

$$\boxed{y(x) = a_0 x^{-1/2} \sin x} \tag{3}$$

其中之係數 a_0 應選擇：

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!} = \frac{1}{2^{1/2}\left(\frac{1}{2}!\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}!\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{\pi}/2\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

故式(3)可表為：

$$\boxed{y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x = J_{\frac{1}{2}}(x)} \tag{3'}$$

❷ 當 $r = -1/2$ 時

因 $r = -1/2$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫為：

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 a_1 - \frac{1}{4}a_1 = 0 & (2b'') \\ \left[\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2 - \frac{1}{4}\right]a_2 + a_0 = 0 & (2c'') \\ \left[\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2 - \frac{1}{4}\right]a_3 + a_1 = 0 & (2d'') \\ \left[\left(-\frac{1}{2}+4\right)^2 - \frac{1}{4}\right]a_4 + a_2 = 0 & (2e'') \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

由式(2*b*”)知：

$$\frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_1 = 0$$

故 a_1 應為任意值，即：

$$\boxed{a_1 = \text{任意值}}$$

將a_1代入式(2d'')，則由式(2d'')可得：

$$\left[\left(-\tfrac{1}{2}+3\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_3+a_1=0$$

整理後可得：

$$a_3=-\frac{1}{6}a_1$$

另外由式(2c'')，可知：

$$2a_2+a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_2=-\frac{1}{2}a_0}$$

再將$a_2=-\dfrac{1}{2}a_0$之結果代入式(2e'')，則式(2e'')需調整爲：

$$12a_4-\frac{1}{2}a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_4=\frac{1}{24}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned}
y(x)&=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\\
&=a_0x^{-1/2}+a_1x^{1/2}-\frac{1}{2}a_0x^{3/2}-\frac{1}{6}a_1x^{5/2}+\frac{1}{24}a_0x^{7/2}+\cdots\\
&=a_0x^{-1/2}\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-+\cdots\right)+a_1x^{-1/2}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+-\cdots\right)
\end{aligned}$$

由 Taylor 級數展開觀念知：

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots$$

故問題之第二個解為：

$$\boxed{y(x) = x^{-1/2}\left(a_0 \cos x + a_1 \sin x\right)} \qquad (4)$$

同理，係數 a_0 應選擇：

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!} = \frac{1}{2^{1/2}\left(\frac{1}{2}!\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{\pi}/2\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

而係數 a_1 可選擇為 $a_1 = 0$，因這不會影響最後的通解。基於此，可知：

$$\boxed{y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{-1/2}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = J_{-\frac{1}{2}}(x)} \qquad (4')$$

式(3')與式(4')代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式為線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3')與式(4')的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$\boxed{y(x) = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)}$$

其中 $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ ，$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ 。

範例二
試求微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)y=0$ 之解。

解答：

這個題目是屬於案例 3(a)之情況，因為本題所解得的特徵根 $r_1=-\dfrac{3}{2}$、$r_2=\dfrac{3}{2}$，即 $r_1\neq r_2$，且 $r_1-r_2=$ 整數。以下擬以兩種解法推求出問題之通解(General solution)。

• 解法一：根據定理求通解

Bessel 方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$ 之通解為 $y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$。現在 $\nu=\dfrac{3}{2}$，故問題之通解為：

$$\boxed{y=C_1J_{\frac{3}{2}}(x)+C_2Y_{\frac{3}{2}}(x)}$$

• 解法二：根據 *Frobenius* 解法求通解

令問題之解為：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$，則：

$$
\begin{aligned}
&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\
&\quad+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)' \qquad (1)\\
&\quad+\left(x^2-\tfrac{9}{4}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0
\end{aligned}
$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$
x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)''+x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)'+\left(x^2-\tfrac{9}{4}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)=0 \qquad (1')
$$

式(1)微分後，可得：

$$
\begin{aligned}
&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\
&\quad+x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\
&\quad+\left(x^2-\tfrac{9}{4}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0
\end{aligned}
$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$
\begin{array}{ccccc}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots\\
+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots\\
 & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots\\
-\tfrac{9}{4}a_0x^r & -\tfrac{9}{4}a_1x^{r+1} & -\tfrac{9}{4}a_2x^{r+2} & -\tfrac{9}{4}a_3x^{r+3} & -\cdots=0
\end{array}
$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互為線性獨立，且其和為零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
r(r-1)a_0+a_0r-\tfrac{9}{4}a_0=0\\
(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\tfrac{9}{4}a_1=0\\
(r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0-\tfrac{9}{4}a_2=0\\
(r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1-\tfrac{9}{4}a_3=0\\
(r+4)(r+3)a_4+(r+4)a_4+a_2-\tfrac{9}{4}a_4=0\\
(r+5)(r+4)a_5+(r+5)a_5+a_3-\tfrac{9}{4}a_5=0\\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases} \left(r^2-\frac{9}{4}\right)a_0=0 & (2a) \\ (r+1)^2 a_1-\frac{9}{4}a_1=0 & (2b) \\ \left[(r+2)^2-\frac{9}{4}\right]a_2+a_0=0 & (2c) \\ \left[(r+3)^2-\frac{9}{4}\right]a_3+a_1=0 & (2d) \\ \left[(r+4)^2-\frac{9}{4}\right]a_4+a_2=0 & (2e) \\ \left[(r+5)^2-\frac{9}{4}\right]a_5+a_3=0 & (2f) \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

由定理知，$a_0 \neq 0$，故式(2*a*)應改寫爲：

$$r^2-\frac{9}{4}=0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r=3/2,\ -3/2}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下，a_0、a_1、a_2、a_3、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 3/2$ 的情況，然後再說明 $r = -3/2$ 的情況。

❶ 當 $r = 3/2$ 時

因 $r = 3/2$，故式(2*b*)-(2*f*)可改寫爲：

$$
\begin{cases}
\left(\tfrac{3}{2}+1\right)^2 a_1-\tfrac{9}{4}a_1=0 & (2b') \\
\left[\left(\tfrac{3}{2}+2\right)^2-\tfrac{9}{4}\right]a_2+a_0=0 & (2c') \\
\left[\left(\tfrac{3}{2}+3\right)^2-\tfrac{9}{4}\right]a_3+a_1=0 & (2d') \\
\left[\left(\tfrac{3}{2}+4\right)^2-\tfrac{9}{4}\right]a_4+a_2=0 & (2e') \\
\left[\left(\tfrac{3}{2}+5\right)^2-\tfrac{9}{4}\right]a_5+a_2=0 & (2f') \\
\quad\vdots &
\end{cases}
$$

由式(2*b*')知：

$$\boxed{a_1=0}$$

將 $a_1=0$ 代入式(2*d*')，則由式(2*d*')可得：

$$\boxed{a_3=0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1=a_3=a_5=\cdots=0}$ 之結果。另外由式(2*c*')，可知：

$$10a_2+a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_2=-\frac{1}{10}a_0}$$

再將 $a_2=-\frac{1}{10}a_0$ 之結果代入式(2*e*')，則式(2*e*')需調整爲：

$$\left[\left(\tfrac{3}{2}+4\right)^2-\tfrac{9}{4}\right]a_4-\frac{1}{10}a_0=0$$

$$28\,a_4-\frac{1}{10}a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{1}{280} a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\ &= a_0 x^{3/2} - \frac{1}{10} a_0 x^{7/2} + \frac{1}{280} a_0 x^{11/2} + \cdots \end{aligned}$$

故問題之第一個解為：

$$\boxed{y(x) = a_0 \left(x^{3/2} - \frac{1}{10} x^{7/2} + \frac{1}{280} x^{11/2} + \cdots \right)} \qquad (3)$$

❷ 當 $r = -3/2$ 時

因 $r = -3/2$，故式(2*b*)-(2*f*)可改寫為：

$$\begin{cases} \left(-\frac{3}{2}+1\right)^2 a_1 - \frac{9}{4} a_1 = 0 & (2b'') \\ \left[\left(-\frac{3}{2}+2\right)^2 - \frac{9}{4}\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c'') \\ \left[\left(-\frac{3}{2}+3\right)^2 - \frac{9}{4}\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d'') \\ \left[\left(-\frac{3}{2}+4\right)^2 - \frac{9}{4}\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e'') \\ \left[\left(-\frac{3}{2}+5\right)^2 - \frac{9}{4}\right] a_5 + a_3 = 0 & (2f'') \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

由式(2*b*”)知：

$$\frac{1}{4} a_1 - \frac{9}{4} a_1 = 0$$

故 a_1 應為任意值，即：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

由式(2*d*")知：

$$\left[\left(-\tfrac{3}{2}+3\right)^2-\tfrac{9}{4}\right]a_3+a_1=0$$

整理後可得：

$$\boxed{a_1=0}\text{、}\boxed{a_3=\text{任意值}}$$

另外由式(2*f*")，可知：

$$10a_5+a_3=0$$

故：

$$\boxed{a_5=-\frac{1}{10}a_3}$$

另外由式(2*c*")，可知：

$$-2a_2+a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_2=\frac{1}{2}a_0}$$

再將 $a_2=\dfrac{1}{2}a_0$ 之結果代入式(2*e*")，則式(2*e*")需調整爲：

$$4a_4+a_2=0$$

$$\Rightarrow\ 4a_4+\frac{1}{2}a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_4=-\frac{1}{8}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + a_3 x^{r+3} + a_4 x^{r+4} + a_5 x^{r+5} + \cdots \\
&= a_0 x^{-3/2} + a_1 x^{-1/2} + a_2 x^{1/2} + a_3 x^{3/2} + a_4 x^{5/2} + a_5 x^{7/2} + \cdots \\
&= a_0 x^{-3/2} + (0) x^{-1/2} + \frac{a_0}{2} x^{1/2} + a_3 x^{3/2} - \frac{a_0}{8} x^{5/2} - \frac{a_3}{10} x^{7/2} + \cdots \\
&= a_0 \left(x^{-3/2} + \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{8} x^{5/2} + - \cdots \right) + a_3 \left(x^{3/2} - \frac{1}{10} x^{7/2} + - \cdots \right)
\end{aligned}
$$

故問題之第二個解為：

$$
\boxed{y(x) = a_0 \left(x^{-3/2} + \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{8} x^{5/2} + - \cdots \right) + a_3 \left(x^{3/2} - \frac{1}{10} x^{7/2} + - \cdots \right)} \qquad (4)
$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式為線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$
\boxed{y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}
$$

其中

$$
\boxed{y_1(x) = a_0 \left(x^{3/2} - \frac{1}{10} x^{7/2} + \frac{1}{280} x^{11/2} + \cdots \right)},
$$

$$
\boxed{y_2(x) = a_0 \left(x^{-3/2} + \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{8} x^{5/2} + - \cdots \right) + a_3 \left(x^{3/2} - \frac{1}{10} x^{7/2} + - \cdots \right)}。
$$

亦可將通解表為：

$$
\boxed{y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}
$$

其中

$$
\boxed{y_1(x) = x^{3/2} - \frac{1}{10} x^{7/2} + \frac{1}{280} x^{11/2} + \cdots}, \quad \boxed{y_2(x) = x^{-3/2} + \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{8} x^{5/2} + - \cdots}。
$$