提要 129：*Frobenius* 解法在 *Bessel* 方程式的應用---案例 2，$r_1 = r_2 = 0$，通解含 $\ln x$ 項($\nu = 0$)

所討論之 *Bessel* 方程式是 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$，其中 $\nu = 0$。筆者擬先將 *Frobenius* 解法所可能面對的 *Bessel* 方程式之三種案例、四種情況先整理出來，再針對第二種案例以範例加以詳細說明。

定理：以 *Frobenius* 解法解析 *Bessel* 方程式
之前的 *Indicial* 方程式 $r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$ 現在可表爲 $(r-\nu)(r+\nu) = 0$，因此，之前的兩個根 r_1、r_2 分別爲 $r_1 = \nu$ 及 $r_2 = -\nu$，其中 $\nu \geq 0$。
案例 1. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 \neq$ 整數，即 $\nu \neq 0$、1、2、3、…、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、…
$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = J_{-\nu}(x) \end{cases}$$
案例 2. $r_1 = r_2 = r$，即 $\nu = 0$
$$\begin{cases} y_1 = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_0(x) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = Y_0(x) \end{cases}$$
案例 3. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 =$ 整數，即 $\nu = \frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、…、1、2、3、…
情況(a)：不含 $\ln x$ 項
$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = J_{-\nu}(x) \end{cases}$$
情況(b)：含 $\ln x$ 項
$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = Y_\nu(x) \end{cases}$$

註：雖然有三種案例四種情況，但 *Bessel* 方程式 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$ 之通解一定可表爲 $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$，其中 $J_\nu(x)$ 與 $Y_\nu(x)$ 分別爲 ν 階之第一種與第二種 *Bessel* 函數。以下擬針對案例 2 之情況，以範例加以說明。

範例一
試求微分方程式 $x^2y''+xy'+x^2y=0$ 之解。

解答：

• 解法一：根據定理求通解

Bessel 方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$ 之通解爲 $y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$。現在 $\nu=0$ ，故問題之通解爲：

$$\boxed{y=C_1J_0(x)+C_2Y_0(x)}$$

• 解法二：根據 *Frobenius* 解法求通解

令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xy'+x^2y=0$ ，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&+x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned} \tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)''+x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)'+x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)=0 \tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$
\begin{aligned}
&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\
&\quad+x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\
&\quad+x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0
\end{aligned}
$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$
\begin{array}{lllll}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots\\
\quad+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & \quad+a_2(r+2)x^{r+2} & \quad+a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots\\
 & & \qquad+a_0x^{r+2} & \qquad+a_1x^{r+3} & +\cdots=0
\end{array}
$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互為線性獨立，且其和為零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
r(r-1)a_0+a_0r=0\\
(r+1)ra_1+(r+1)a_1=0\\
(r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0=0\\
(r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1=0\\
(r+4)(r+3)a_4+(r+4)a_4+a_2=0\\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式可再整理為：

$$
\begin{cases}
r^2a_0=0 & (2a)\\
(r+1)^2a_1=0 & (2b)\\
(r+2)^2a_2+a_0=0 & (2c)\\
(r+3)^2a_3+a_1=0 & (2d)\\
(r+4)^2a_4+a_2=0 & (2e)\\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故式$(2a)$應改寫為：

$$r^2=0$$

上面這個方程式稱為 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方

式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = 0,\ 0}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下，a_0、a_1、a_2、a_3、…等係數間之關係，解題過程會較清楚。本題爲重根情況，因此並無討論順序問題。以下直接討論 $r = 0$ 的情況下，通解（*General Solution*）中之第一個基底（*Basis*）；然後再以降階法（*Reduction of Order*）說明通解中之第二個基底。

❶ 當 $r = 0$ 時

因 $r = 0$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫爲：

$$\begin{cases} (1)^2 a_1 = 0 & (2b') \\ (2)^2\ a_2 + a_0 = 0 & (2c') \\ (3)^2\ a_3 + a_1 = 0 & (2d') \\ (4)^2\ a_4 + a_2 = 0 & (2e') \\ \quad\vdots \end{cases}$$

由式(2*b*’)知：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將 $a_1 = 0$ 代入式(2*d*’)，則由式(2*d*’)可得：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$ 之結果。另外由式(2*c*’)，可知：

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0}$$

再將 $a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0$ 之結果代入式(2*e*’)，則式(2*e*’)需調整爲：

$$\boxed{a_4 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\ &= a_0 x^0 - \frac{1}{2^2} a_0 x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} a_0 x^4 - \cdots \\ &= a_0 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} x^4 - \cdots\right) \end{aligned}$$

其中之係數 a_0 應選擇：

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!} = \frac{1}{2^0 (0!)} = \frac{1}{1(1)} = 1$$

故問題之第一個解可表爲：

$$\boxed{y(x) = 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} x^4 - \cdots} \tag{3}$$

上式即爲 $J_0(x)$，亦即 $y_1 = J_0(x)$。

❷ 當 $r=$ 第二個 0 時，需採用降階法求解

由降階法知，若 y_1 與 y_2 互爲線性獨立，則其相除的結果會與變數 x 有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x) \tag{4}$$

現在，考慮 $y_1 = 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} x^4 - \cdots$，則：

$$y_2 = u\left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} x^4 - \cdots\right) \tag{5}$$

先將 y_2 表爲 $y_2 = uy_1$ ，再將上式代回原式，則：

$$x^2\left(uy_1\right)'' + x\left(uy_1\right)' + x^2\left(uy_1\right) = 0$$

上式可化簡爲：

$$x^2\left(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''\right) + x\left(u'y_1 + uy_1'\right) + x^2\left(uy_1\right) = 0$$

上式可整理爲：

$$\left[x^2 y_1\right]u'' + \left[2x^2 y_1' + xy_1\right]u' + \left[x^2 y_1'' + xy_1' + x^2 y_1\right]u = 0 \qquad (6)$$

因 y_1 是原微分方程式的解，故：

$$x^2 y_1'' + xy_1' + x^2 y_1 = 0$$

所以式(6)可調整爲：

$$\left[x^2 y_1\right]u'' + \left[2x^2 y_1' + xy_1\right]u' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u''}{u'} = -\frac{2x^2 y_1' + xy_1}{x^2 y_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u''}{u'} = -\frac{2y_1'}{y_1} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{u''}{u'}dx = -\int \frac{2y_1'}{y_1}dx - \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln u' = -2\ln y_1 - \ln x$$

$$\Rightarrow \quad \ln u' = \ln \frac{1}{xy_1^2}$$

所以 $u' = \dfrac{1}{xy_1^2}$ ，再將 $y_1 = 1 - \dfrac{1}{2^2}x^2 + \dfrac{1}{2^2 \cdot 4^2}x^4 - \cdots$ 代入，則：

$$u' = \frac{1}{x\left(1 - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}x^4 - \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}x^4 - \cdots\right)}$$

⇨ $u' = \dfrac{1}{x\left(1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{32}x^4-+\cdots\right)}$

⇨ $u' = \dfrac{1}{x-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{32}x^5-+\cdots}$

⇨ $u' = \dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{32}x^3+\cdots$

⇨ $\int u'dx = \int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{32}x^3+\cdots\right)dx$

⇨ $u = \ln x+\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{128}x^4+\cdots$

而 $y_2 = uy_1$，故

$$y_2 = \left(\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{128}x^4+\cdots\right)y_1$$

$$⇨\ y_2 = y_1\ln x+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{128}x^4+\cdots\right)y_1$$

$$⇨\ y_2 = \left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}x^4-\cdots\right)\ln x+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{128}x^4+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}x^4-\cdots\right)$$

$$⇨\ y_2 = \left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}x^4-\cdots\right)\ln x+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{128}x^4+-\cdots\right)$$

所以問題之通解為：

$$\boxed{y(x) = C_1y_1+C_2y_2}$$

其中

$\boxed{y_1 = 1-\dfrac{1}{2^2}x^2+\dfrac{1}{2^2\cdot 4^2}x^4-\cdots}$

$\boxed{y_2 = y_1\ln x+\left(\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{128}x^4+-\cdots\right)}$

問題之通解亦可表為 $\boxed{y = C_1J_0(x)+C_2Y_0(x)}$。

註：

1. *Bessel* 方程式是 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$ 中，僅 $\nu=0$ 的情況符合案例 2。
2. $J_0\left(x\right)=1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot4^2}x^4-\cdots$
3. $Y_0\left(x\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot4^2}x^4-\cdots\right)\ln x+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{128}x^4+-\cdots\right)$。