提要 128：*Frobenius* 解法在 *Bessel* 方程式的應用---案例 1，$r_1 \neq r_2$，$r_1 - r_2 \neq$ 整數

所討論之 *Bessel* 方程式是 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$，其中 $\nu \neq 0$、1、2、3、…、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、…等。筆者擬先將 *Frobenius* 解法所可能面對的 *Bessel* 方程式之三種案例、四種情況先整理出來，再針對第一種案例以範例加以詳細說明。

定理：以 *Frobenius* 解法解析 *Bessel* 方程式

之前的 *Indicial* 方程式 $r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$ 現在可表為 $(r-\nu)(r+\nu) = 0$，因此，之前的兩個根 r_1、r_2 分別為 $r_1 = \nu$ 及 $r_2 = -\nu$，其中 $\nu \geq 0$。

案例 1. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 \neq$ 整數，即 $\nu \neq 0$、1、2、3、…、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、…

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = J_{-\nu}(x) \end{cases}$$

案例 2. $r_1 = r_2 = r$，即 $\nu = 0$

$$\begin{cases} y_1 = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_0(x) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = Y_0(x) \end{cases}$$

案例 3. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 =$ 整數，即 $\nu = \frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、…、1、2、3、…

情況(a)：不含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = J_{-\nu}(x) \end{cases}$$

情況(b)：含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = J_\nu(x) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) = Y_\nu(x) \end{cases}$$

註：雖然有三種案例四種情況，但 *Bessel* 方程式 $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$ 之通解一定可表為 $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$，其中 $J_\nu(x)$ 與 $Y_\nu(x)$ 分別為 ν 階之第一種與第二種 *Bessel* 函數。以下擬針對案例 1 之情況，以範例加以說明。

範例一
試求微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$ 之解。

解答：

這個題目屬於案例 1 之情況，因爲本題所解得的特徵根 $r_1=-\dfrac{1}{3}$、$r_2=\dfrac{1}{3}$，即 $r_1\neq r_2$，且 $r_1-r_2\neq$ 整數。以下擬以兩種解法推求出問題之通解(General solution)。

• 解法一：根據定理求通解

已知 *Bessel* 方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$ 之通解爲 $y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$。現在 $\nu=\dfrac{1}{3}$，故問題之通解爲：

$$\boxed{y=C_1J_{1/3}(x)+C_2Y_{1/3}(x)}$$

• 解法二：根據 *Frobenius* 解法求通解

令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)'' + x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)' + \left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)=0 \qquad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}
&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\
&\quad+x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\
&\quad+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0
\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{ccccc}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots\\
+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots\\
 & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots\\
-\tfrac{1}{9}a_0x^r & -\tfrac{1}{9}a_1x^{r+1} & -\tfrac{1}{9}a_2x^{r+2} & -\tfrac{1}{9}a_3x^{r+3} & -\cdots=0
\end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互為線性獨立，且其和為零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}
r(r-1)a_0+a_0r-\tfrac{1}{9}a_0=0\\
(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\tfrac{1}{9}a_1=0\\
(r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0-\tfrac{1}{9}a_2=0\\
(r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1-\tfrac{1}{9}a_3=0\\
(r+4)(r+3)a_4+(r+4)a_4+a_2-\tfrac{1}{9}a_4=0\\
\qquad\qquad\vdots
\end{cases}$$

上式可再整理為：

$$
\begin{cases}
\left(r^2-\frac{1}{9}\right)a_0=0 & (2a)\\
(r+1)^2 a_1-\frac{1}{9}a_1=0 & (2b)\\
\left[(r+2)^2-\frac{1}{9}\right]a_2+a_0=0 & (2c)\\
\left[(r+3)^2-\frac{1}{9}\right]a_3+a_1=0 & (2d)\\
\left[(r+4)^2-\frac{1}{9}\right]a_4+a_2=0 & (2e)\\
\quad\vdots
\end{cases}
$$

由定理知，$a_0 \neq 0$ ，故式(2*a*)應改寫爲：

$$r^2-\frac{1}{9}=0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = 1/3,\ -1/3}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下， a_0 、a_1 、a_2 、a_3 、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1/3$ 的情況，然後再說明 $r = -1/3$ 的情況。

❶ 當 $r = 1/3$ 時

因 $r = 1/3$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫爲：

$$
\begin{cases}
\left(\frac{1}{3}+1\right)^2 a_1-\frac{1}{9}a_1=0 & (2b')\\
\left[\left(\frac{1}{3}+2\right)^2-\frac{1}{9}\right]a_2+a_0=0 & (2c')\\
\left[\left(\frac{1}{3}+3\right)^2-\frac{1}{9}\right]a_3+a_1=0 & (2d')\\
\left[\left(\frac{1}{3}+4\right)^2-\frac{1}{9}\right]a_4+a_2=0 & (2e')\\
\quad\vdots
\end{cases}
$$

由式(2b')知：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將 $a_1 = 0$ 代入式(2d')，則由式(2d')可得：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$ 之結果。另外由式(2c')，可知：

$$\frac{16}{3} a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{3}{16} a_0}$$

再將 $a_2 = -\frac{3}{16} a_0$ 之結果代入式(2e')，則式(2e')需調整爲：

$$\left[\left(\tfrac{1}{3} + 4\right)^2 - \tfrac{1}{9}\right] a_4 - \frac{3}{16} a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{56}{3} a_4 - \frac{3}{16} a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{9}{896} a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\
&= a_0 x^{1/3} - \frac{3}{16} a_0 x^{7/3} + \frac{9}{896} a_0 x^{13/3} - + \cdots \\
&= a_0 x^{1/3} \left(1 - \frac{3}{16} x^2 + \frac{9}{896} x^4 - + \cdots \right) \\
&= a_0 x^{-2/3} \left(x - \frac{3}{16} x^3 + \frac{9}{896} x^5 - + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

故問題之第一個解爲：

$$
\boxed{y(x) = a_0 x^{-2/3} \left(x - \frac{3}{16} x^3 + \frac{9}{896} x^5 - + \cdots \right)} \qquad (3)
$$

❷ 當 $r = -1/3$ 時

因 $r = -1/2$，故式(2b)-(2e)可改寫爲：

$$
\begin{cases}
\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2 a_1 - \frac{1}{9} a_1 = 0 & (2b'') \\
\left[\left(-\frac{1}{3}+2\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c'') \\
\left[\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d'') \\
\left[\left(-\frac{1}{3}+4\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e'') \\
\qquad \vdots
\end{cases}
$$

由式(2b”)知：

$$
\frac{4}{9} a_1 - \frac{1}{9} a_1 = 0
$$

故

$$
\boxed{a_1 = 0}
$$

將 a_1 代入式(2d”)，則由式(2d”)可得：

$$\left[\left(-\tfrac{1}{3}+3\right)^2-\tfrac{1}{9}\right]a_3+a_1=0$$

整理後可得：

$$a_3=-\frac{1}{7}a_1=0$$

依此類推，應可求出$\boxed{a_1=a_3=a_5=\cdots=0}$之結果。另外由式(2$c$”)，可知：

$$\frac{8}{3}a_2+a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_2=-\frac{3}{8}a_0}$$

再將$a_2=-\dfrac{3}{8}a_0$之結果代入式(2e”)，則式(2e”)需調整為：

$$\frac{40}{3}a_4-\frac{3}{8}a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_4=\frac{9}{320}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + a_3 x^{r+3} + a_4 x^{r+4} + \cdots \\
&= a_0 x^{-1/3} + a_1 x^{2/3} + a_2 x^{5/3} + a_3 x^{8/3} + a_4 x^{11/3} + \cdots \\
&= a_0 x^{-1/3} - \frac{3}{8} a_0 x^{5/3} + \frac{9}{320} a_0 x^{11/3} + \cdots \\
&= a_0 x^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{320} x^4 - + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

故問題之第二個解為：

$$
\boxed{y(x) = a_0 x^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{320} x^4 - + \cdots \right)} \tag{4}
$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式為線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$
y(x) = \tilde{C}_1 a_0 x^{-2/3} \left(x - \frac{3}{16} x^3 + \frac{9}{896} x^5 - + \cdots \right) + \tilde{C}_2 a_0 x^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{320} x^4 - + \cdots \right)
$$

經整理後，通解可表為：

$$
\boxed{y(x) = C_1 x^{-2/3} \left(x - \frac{3}{16} x^3 + \frac{9}{896} x^5 - + \cdots \right) + C_2 x^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{320} x^4 - + \cdots \right)}
$$

其中 $C_1 = \tilde{C}_1 a_0$ ， $C_2 = \tilde{C}_2 a_0$ 。上式應可繼續化簡成與 $J_{1/3}(x)$ 、 $J_{-1/3}(x)$ 或 $Y_{1/3}(x)$ 有關之型式，請讀者試試看。

範例二
試求微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ 之解。

解答：

這個題目跟範例一似乎很像，然而範例一是屬於案例 1 之情況，而本範例則是屬於案例 3(a)之情況，因爲本題所解得的特徵根 $r_1=-\dfrac{1}{2}$、$r_2=\dfrac{1}{2}$，即 $r_1\neq r_2$，且 $r_1-r_2=$ 整數。以下擬以兩種解法推求出問題之通解(General solution)。

• 解法一：根據定理求通解

先由廣義型式之 *Bessel* 方程式的通解討論之。*Bessel* 方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$ 之通解爲 $y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$。現在 $\nu=\dfrac{1}{2}$，故問題之通解爲：

$$\boxed{y=C_1J_{1/2}(x)+C_2Y_{1/2}(x)}$$

• 解法二：根據 *Frobenius* 解法求通解

擬先由廣義型式之 *Bessel* 方程式的通解討論之。令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&\quad+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&\quad+\left(x^2-\nu^2\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)'' + x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)' + \left(x^2-\nu^2\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right) = 0 \qquad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}
&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2} + a_1(r+1)rx^{r-1} + a_2(r+2)(r+1)x^r + \cdots\right] \\
&\quad + x\left[ra_0x^{r-1} + a_1(r+1)x^r + a_2(r+2)x^{r+1} + \cdots\right] \\
&\quad + \left(x^2-\nu^2\right)\left(a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots\right) = 0
\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{ccccc}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots \\
+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots \\
 & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots \\
-\nu^2a_0x^r & -\nu^2a_1x^{r+1} & -\nu^2a_2x^{r+2} & -\nu^2a_3x^{r+3} & -\cdots = 0
\end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}
r(r-1)a_0 + a_0r - \nu^2a_0 = 0 \\
(r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \nu^2a_1 = 0 \\
(r+2)(r+1)a_2 + (r+2)a_2 + a_0 - \nu^2a_2 = 0 \\
(r+3)(r+2)a_3 + (r+3)a_3 + a_1 - \nu^2a_3 = 0 \\
(r+4)(r+3)a_4 + (r+4)a_4 + a_2 - \nu^2a_4 = 0 \\
\qquad\vdots
\end{cases}$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases}
\left(r^2-\nu^2\right)a_0 = 0 & (2a) \\
(r+1)^2a_1 - \nu^2a_1 = 0 & (2b) \\
\left[(r+2)^2-\nu^2\right]a_2 + a_0 = 0 & (2c) \\
\left[(r+3)^2-\nu^2\right]a_3 + a_1 = 0 & (2d) \\
\left[(r+4)^2-\nu^2\right]a_4 + a_2 = 0 & (2e) \\
\qquad\vdots
\end{cases}$$

由 *Frobenius* 定理知，$a_0 \neq 0$，故式(2*a*)應改寫為：

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

上面這個方程式稱為 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = \nu, -\nu}$$

因為考慮$\nu = \dfrac{1}{2}$，所以$r = -\dfrac{1}{2}$或$r = \dfrac{1}{2}$。一般而言，先討論 *r* 值較大的情況下，a_0、a_1、a_2、a_3、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = \nu = 0.5$ 的情況，然後再說明 $r = -\nu = -0.5$ 的情況。

❶ 當 $r = \nu = 1/2$ 時

因 $r = \nu$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫為：

$$\begin{cases} (\nu+1)^2 a_1 - \nu^2 a_1 = 0 & (2b') \\ \left[(\nu+2)^2 - \nu^2\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c') \\ \left[(\nu+3)^2 - \nu^2\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d') \\ \left[(\nu+4)^2 - \nu^2\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e') \\ \quad\vdots \end{cases}$$

由式(2*b*’)知$(2\nu+1)a_1 = 0$，因為$\nu = 1/2$，所以：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將$a_1 = 0$代入式(2*d*’)，則由式(2*d*’)可得：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出$\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$之結果。另外由式$(2c')$，可知$2(2\nu+2)a_2 + a_0 = 0$，故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0}$$

再將$a_2 = -\frac{1}{2^2(\nu+1)}a_0$之結果代入式$(2e')$，則式$(2e')$需調整爲：

$$\left[\left(\frac{1}{2}+4\right)^2 - \frac{1}{4}\right]a_4 - \frac{1}{6}a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{1}{120}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\ &= a_0 x^{1/2} - \frac{1}{6}a_0 x^{5/2} + \frac{1}{120}a_0 x^{9/2} + \cdots \\ &= a_0 x^{-1/2}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right) \end{aligned}$$

由 *Taylor* 級數展開觀念知：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots$$

故問題之第一個解爲：

$$\boxed{y(x) = a_0 x^{-1/2}\sin x} \qquad (3)$$

其中之係數a_0應選擇：

$$a_0=\frac{1}{2^{\nu}\nu!}=\frac{1}{2^{1/2}\left(\frac{1}{2}!\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}!\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{\pi}/2\right)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

故式(3)可表爲：

$$\boxed{y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x=J_{\frac{1}{2}}(x)} \qquad (3')$$

❷ 當 $r=-1/2$ 時

因 $r=-1/2$，故式(2b)-(2e)可改寫爲：

$$\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 a_1-\frac{1}{4}a_1=0 & (2b'')\\ \left[\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_2+a_0=0 & (2c'')\\ \left[\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_3+a_1=0 & (2d'')\\ \left[\left(-\frac{1}{2}+4\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_4+a_2=0 & (2e'')\\ \quad\vdots \end{cases}$$

由式(2b”)知：

$$\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_1=0$$

故 a_1 應爲任意值，即：

$$\boxed{a_1=\text{任意值}}$$

將 a_1 代入式(2d”)，則由式(2d”)可得：

$$\left[\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_3+a_1=0$$

整理後可得：

$$a_3 = -\frac{1}{6}a_1$$

另外由式(2*c*”)，可知：

$$2a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{2}a_0}$$

再將$a_2 = -\frac{1}{2}a_0$之結果代入式(2*e*”)，則式(2*e*”)需調整為：

$$12a_4 - \frac{1}{2}a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{1}{24}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\ &= a_0 x^{-1/2} + a_1 x^{1/2} - \frac{1}{2}a_0 x^{3/2} - \frac{1}{6}a_1 x^{5/2} + \frac{1}{24}a_0 x^{7/2} + \cdots \\ &= a_0 x^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots\right) + a_1 x^{-1/2}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots\right) \end{aligned}$$

由 *Taylor* 級數展開觀念知：

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots$$

故問題之第二個解爲：

$$\boxed{y(x)=x^{-1/2}\left(a_0\cos x+a_1\sin x\right)} \tag{4}$$

同理，係數 a_0 應選擇：

$$a_0=\frac{1}{2^{\nu}\nu!}=\frac{1}{2^{1/2}\left(\frac{1}{2}!\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{\pi}/2\right)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

而係數 a_1 可選擇爲 $a_1=0$ ，因這不會影響最後的通解。基於此，可知：

$$\boxed{y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{-1/2}\cos x=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x=J_{-\frac{1}{2}}(x)} \tag{4'}$$

式(3')與式(4')代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式爲線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3')與式(4')的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$\boxed{y(x)=C_1J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2J_{-\frac{1}{2}}(x)}$$

其中 $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ ， $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ 。