提要 127：貝色方程式(*Bessel Equation*)所對應之 *Indicial* 方程式

首先說明廣義情況下，*Indicial* 方程式的由來。*Indicial* 方程式是解析微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 的過程中，所產生的一種特徵方程式。說明如下：

廣義情況下之 *Indicial* 方程式
Indicial 方程式係指： $$r(r-1)+b_0r+c_0=0$$ 其係解析微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 的過程中，所產生的一種特徵方程式。由 *Indicial* 方程式可解出兩個 r 值。

說明 *Indicial* 方程式的由來：

若考慮 $b(x)$ 與 $c(x)$ 在 $x=0$ 是解析的，則 $b(x)$ 與 $c(x)$ 可以 $x=0$ 為中心點，將其分別表為如下所示之冪級數(*Power Series*)：

$$b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$$

$$c(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

令微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 之解為：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&\quad+x\left(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&\quad+\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

式(1)微分後，可得：

$$
\begin{aligned}
&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\
&\quad +x\left(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\right)\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\
&\quad +\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0
\end{aligned}
$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$
\begin{array}{lll}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +\cdots \\
+ra_0b_0x^r & +\left[a_0b_1r+a_1b_0(r+1)\right]x^{r+1} & +\cdots \\
+a_0c_0x^r & +\left(a_1c_0+a_0c_1\right)x^{r+1} & +\cdots=0
\end{array}
$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、…等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
r(r-1)a_0+ra_0b_0+a_0c_0=0 \\
(r+1)a_1+\left[a_0b_1r+a_1b_0(r+1)\right]+\left(a_1c_0+a_0c_1\right)=0 \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式中之第一個方程式可再整理爲：

$$\left[r(r-1)+rb_0+c_0\right]a_0=0$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故上式應改寫爲：

$$\boxed{r(r-1)+b_0r+c_0=0}$$

上面這個方程式即爲 *Indicial* 方程式，實際上它就是特徵方程式的另一種稱呼方式。爲了應付考試，若讀者有能力將此方程式記下來，那就背下來吧！但也應瞭解其由來，以便萬一真的忘記了，也知道怎麼重新推導出來。

現在再來看貝色方程式(*Bessel Equation*)所對應之 *Indicial* 方程式。

貝色方程式之 *Indicial* 方程式
貝色方程式之 *Indicial* 方程式為： $$(r-\nu)(r+\nu)=0$$ 其係解析貝色方程式 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$、$\nu\geq 0$ 的過程中，所產生的一種特徵方程式。由 *Indicial* 方程式可解出兩個 r 值，分別為 ν 與 $-\nu$。

說明：

因廣義情況下之微分方程式是表為 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$，若與貝色方程式 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ 相互對照，則：

$$b(x)=1\text{、}c(x)=x^2-\nu^2 \tag{1}$$

又若考慮 $b(x)$ 與 $c(x)$ 在 $x=0$ 是解析的，則 $b(x)$ 與 $c(x)$ 可以 $x=0$ 為中心點，將其分別表為如下所示之冪級數(*Power Series*)：

$$b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\text{、}c(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots \tag{2}$$

比較式(1)與式(2)知：

$$b_0=1\text{、}b_i=0(i=1,2,3,\cdots)\text{、}c_0=-\nu^2\text{、}c_2=1\text{、}c_1=c_3=c_4=c_5=\cdots=0 \tag{3}$$

已知 *Indicial* 方程式之廣義形式為：

$$r(r-1)+b_0r+c_0=0$$

故貝色方程式之 *Indicial* 方程式為：

$$r(r-1)+r-\nu^2=0$$

上式可繼續化簡為：

$$\boxed{r^2-\nu^2=0} \text{ 或 } \boxed{(r-\nu)(r+\nu)=0}$$

此即時貝色方程式之 *Indicial* 方程式的由來。而其所對應之兩個特徵根爲 $r=\nu$ 與 $r=-\nu$ 。

範例一
試求微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ 之 *Indicial* 方程式，及其所對應之兩個特徵根。

解答：

將原微分方程式與標準化之微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 作比較，則 $b(x)=1$ 、 $c(x)=x^2-\dfrac{1}{4}$ 。因爲

$$b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$$
$$c(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

故 $b_0=1$ 、 $b_1=b_2=b_3=b_4=b_5=\cdots=0$ ； $c_0=-\dfrac{1}{4}$ 、 $c_2=1$ 、 $c_1=c_3=c_4=c_5=\cdots=0$ 。

由前面的討論知 *Indicial* 方程式可表爲 $r(r-1)+b_0r+c_0=0$，故問題之 *Indicial* 方程式爲

$$r(r-1)+r-\frac{1}{4}=0$$
$$\Rightarrow\ r^2-\frac{1}{4}=0$$
$$\Rightarrow\ \boxed{\left(r+\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\right)=0}$$

上式即爲問題之 *Indicial* 方程式，而其所對應之兩個特徵根爲 $\boxed{r=-\dfrac{1}{2}}$ 與 $\boxed{r=\dfrac{1}{2}}$ 。

【另解】

令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ ，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&\quad+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&\quad+\left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)''+x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)'+\left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)=0\qquad(1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\&\quad+x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\&\quad+\left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{lllll}r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots\\ +a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots\\ & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots\\ -\frac{1}{4}a_0x^r & -\frac{1}{4}a_1x^{r+1} & -\frac{1}{4}a_2x^{r+2} & -\frac{1}{4}a_3x^{r+3} & -\cdots=0\end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 + a_0 r - \frac{1}{4}a_0 = 0 \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \frac{1}{4}a_1 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 + (r+2)a_2 + a_0 - \frac{1}{4}a_2 = 0 \\ (r+3)(r+2)a_3 + (r+3)a_3 + a_1 - \frac{1}{4}a_3 = 0 \\ (r+4)(r+3)a_4 + (r+4)a_4 + a_2 - \frac{1}{4}a_4 = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

上式可再整理為：

$$\begin{cases} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right)a_0 = 0 & (2a) \\ (r+1)^2 a_1 - \frac{1}{4}a_1 = 0 & (2b) \\ \left[(r+2)^2 - \frac{1}{4}\right]a_2 + a_0 = 0 & (2c) \\ \left[(r+3)^2 - \frac{1}{4}\right]a_3 + a_1 = 0 & (2d) \\ \left[(r+4)^2 - \frac{1}{4}\right]a_4 + a_2 = 0 & (2e) \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

由定理知， $a_0 \neq 0$ ，故式$(2a)$應改寫為：

$$\boxed{r^2 - \frac{1}{4} = 0}$$

上面這個方程式即稱為 *Indicial* 方程式，實際上也是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = -\frac{1}{2}} \text{、} \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

此即為 *Indicial* 方程式所對應的兩個特徵根。

範例二
試求微分方程式$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$之 *Indicial* 方程式，及其所對應之兩個特徵根。

解答：

將原微分方程式與標準化之微分方程式$x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$作比較，則$b(x)=1$、$c(x)=x^2-\frac{1}{9}$。因爲

$$
\begin{aligned}
b(x)&=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\\
c(x)&=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

故$b_0=1$、$b_1=b_2=b_3=b_4=b_5=\cdots=0$；$c_0=-\frac{1}{9}$、$c_2=1$、$c_1=c_3=c_4=c_5=\cdots=0$。

由前面的討論知 *Indicial* 方程式可表爲$r(r-1)+b_0r+c_0=0$，故問題之 *Indicial* 方程式爲

$$
\begin{aligned}
&r(r-1)+r-\frac{1}{9}=0\\
\Rightarrow\ &r^2-\frac{1}{9}=0\\
\Rightarrow\ &\boxed{\left(r+\frac{1}{3}\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)=0}
\end{aligned}
$$

上式即爲問題之 *Indicial* 方程式，而其所對應之兩個特徵根爲$\boxed{r=-\frac{1}{3}}$與$\boxed{r=\frac{1}{3}}$。

【另解】

首先，令問題之解爲：

$$
y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots
$$

再代回原微分方程式$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$，則：

$$\begin{aligned} &x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'' \\ &\quad +x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)' \\ &\quad +\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0 \end{aligned} \tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)''+x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)'+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)=0 \tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned} &x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right] \\ &\quad +x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right] \\ &\quad +\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0 \end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{ccccc} r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots \\ +a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots \\ & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots \\ -\tfrac{1}{9}a_0x^r & -\tfrac{1}{9}a_1x^{r+1} & -\tfrac{1}{9}a_2x^{r+2} & -\tfrac{1}{9}a_3x^{r+3} & -\cdots=0 \end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0+a_0r-\tfrac{1}{9}a_0=0 \\ (r+1)ra_1+(r+1)a_1-\tfrac{1}{9}a_1=0 \\ (r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0-\tfrac{1}{9}a_2=0 \\ (r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1-\tfrac{1}{9}a_3=0 \\ (r+4)(r+3)a_4+(r+4)a_4+a_2-\tfrac{1}{9}a_4=0 \\ \qquad\qquad\vdots \end{cases}$$

上式可再整理為：

$$\begin{cases} \left(r^2-\tfrac{1}{9}\right)a_0=0 & (2a) \\ (r+1)^2 a_1-\tfrac{1}{9}a_1=0 & (2b) \\ \left[(r+2)^2-\tfrac{1}{9}\right]a_2+a_0=0 & (2c) \\ \left[(r+3)^2-\tfrac{1}{9}\right]a_3+a_1=0 & (2d) \\ \left[(r+4)^2-\tfrac{1}{9}\right]a_4+a_2=0 & (2e) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

由定理知，$a_0 \neq 0$，故式$(2a)$應改寫為：

$$r^2-\tfrac{1}{9}=0$$

上面這個方程式稱為 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r=-\frac{1}{3}}、\boxed{r=\frac{1}{3}}$$

此即為 *Indicial* 方程式所對應的兩個特徵根。