提要 125：貝色方程式(*Bessel Equation*)之定義

貝色方程式(*Bessel Equation*)是工程上常見之另一種微分方程式，是很重要的一種微分方程式，其定義說明如下。

定義：貝色方程式(*Bessel Equation*)
貝色方程式是定義爲：$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$，其中$\nu\geq 0$。

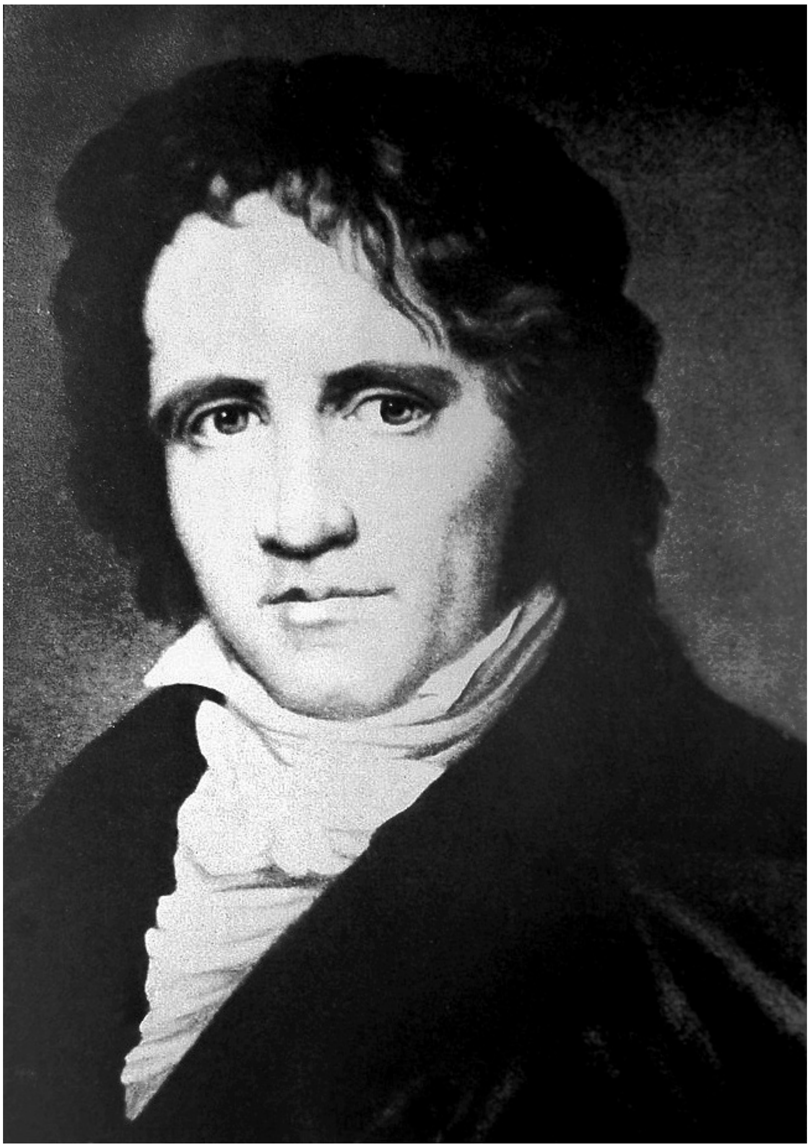
這種方程式之解的推導非常麻煩，因需以 *Frobenius* 解法一步步解析問題。首先考慮問題之解爲$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$，然後代回原式，再推導出其中之 r 值與係數a_0、a_1、a_2、a_3、…等間彼此之關係。其過程相當麻煩！還好的是，因爲這種問題之解有其規律性，故可以根據其解之規律特性作歸納整理，最後發展成一個定理。以下就是這個定理的說明。

定理：貝色方程式(Bessel Equation)之通解
貝色方程式$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$、$\nu\geq 0$之通解爲$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$，其中$C_1$、$C_2$爲任意常數，$J_\nu(x)$與$Y_\nu(x)$分別爲$\nu$階之第一種類型與第二種類型的貝色函數(*Bessel Function*)。

有了上面這個定理後，解貝色方程式就不再有任何困擾了。但是若想知道特定之變數x與ν值所對應之$J_\nu(x)$與$Y_\nu(x)$的函數值，問題就又變得有點麻煩了！因必須去找數學使用手冊或執行套裝軟體程式，才有辦法求出$J_\nu(x)$與$Y_\nu(x)$之函數值。與貝色函數相關之使用手冊排在一起時是非常壯觀的，讀者若有興趣，可在圖書館中找找看，就會相信我的話了。

在研究平面運動的 Kepler 方程式中，貝色函數首先被提出來，而後 Friedrich Wilhelm Bessel (1784~1846) 於 1824 年予以有系統地加以研究，故相關函數就以其名 Bessel 命名之。

下圖爲 Friedrich Wilhelm Bessel 的畫像。



註：摘自網路 http://zh.wikipedia.org/wiki/File:Friedrich_Wilhelm_Bessel.jpeg