提要 124：*Frobenius* 解法---案例 3(*b*)，$r_1 \neq r_2$，$r_1 - r_2 =$ 整數，通解含 $\ln x$ 項

這裏是 *Frobenius* 解法的進一步說明，這是一個定理，筆者擬先將所可能面對的三種案例、四種情況先整理出來，再針對第三種案例之情況(b)以範例加以詳細說明。

定理：*Frobenius* 解法

令 r_1 與 r_2 爲 *Indicial* 方程式 $r(r-1)+b_0 r + c_0 = 0$ 之兩個根。

案例 1. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 \neq$ 整數

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

案例 2. $r_1 = r_2 = r$

$$\begin{cases} y_1 = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right), \quad x > 0 \end{cases}$$

案例 3. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 =$ 整數

情況(a)：不含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

情況(b)：含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

以下擬針對案例 3(b)之情況，以範例加以說明。

範例一
試求微分方程式$\left(x^2-x\right)y''-xy'+y=0$之解。

解答：

令問題之解為：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式$\left(x^2-x\right)y''-xy'+y=0$，則：

$$\begin{aligned}&\left(x^2-x\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&\quad-x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&\quad+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$\left(x^2-x\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)''-x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)'+\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)=0\tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&\left(x^2-x\right)\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\&\quad-x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\&\quad+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{cccccc} & r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +\cdots \\ -r(r-1)a_0x^{r-1} & -a_1(r+1)rx^r & -a_2(r+2)(r+1)x^{r+1} & -a_3(r+3)(r+2)x^{r+2} & -\cdots \\ & -a_0rx^r & -a_1(r+1)x^{r+1} & -a_2(r+2)x^{r+2} & -\cdots \\ & +a_0x^r & +a_1x^{r+1} & +a_2x^{r+2} & +\cdots=0\end{array}$$

因 x^{r-1} 、x^{r} 、x^{r+1} 、x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases} -r(r-1)a_0 = 0 \\ r(r-1)a_0 - (r+1)ra_1 - ra_0 + a_0 = 0 \\ (r+1)ra_1 - (r+2)(r+1)a_2 - (r+1)a_1 + a_1 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 - (r+3)(r+2)a_3 - (r+2)a_3 + a_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 = 0 & (2a) \\ (r-1)^2 a_0 - (r+1)ra_1 = 0 & (2b) \\ r^2 a_1 - (r+2)(r+1)a_2 = 0 & (2c) \\ (r+1)^2 a_2 + (r+2)(r+3)a_3 = 0 & (2d) \\ \vdots \end{cases}$$

由定理知，$a_0 \neq 0$ ，故式(2a)應改寫爲：

$$r(r-1) = 0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = 0,\ 1}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下， a_0 、a_1 、a_2 、a_3 、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1$ 的情況，然後再說明 $r = 0$ 的情況。

❶ 當 $r = 1$ 時

因 $r = 1$，故式(2b)-(2d)可改寫爲：

$$\begin{cases} (1-1)^2 a_0 - (1+1)(1)a_1 = 0 & (2b') \\ 1^2 a_1 - (1+2)(1+1)a_2 = 0 & (2c') \\ (1+1)^2 a_2 + (1+2)(1+3)a_3 = 0 & (2d') \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

由式(2b’)知：

$$(0)a_0 - 2a_1 = 0$$

故：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

請留意由式(2b’)知$a_1 = 0$，而不是$a_0 = 0$，有非常高比例的讀者會誤以爲$a_0 = 0$。其實不是，是$a_1 = 0$才對。將$a_1 = 0$代入式(2c’)，則式(2c’)應改寫爲：

$$1^2(0) - (1+2)(1+1)a_2 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = 0}$$

再將$a_2 = 0$代入式(2d’)，可知：

$$(1+1)^2(0) + (1+2)(1+3)a_3 = 0$$

故：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出$\boxed{a_4 = a_5 = a_6 = \cdots = 0}$之結果。基於此，問題之第一個解可表爲：

$$\boxed{y(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots = a_0 x} \qquad (3)$$

❷ 當 $r = 0$ 時

當 $r = 0$ 時，表 *Frobenius* 解法可以冪級數解法(*Power Series Method*)取代。但也只能以冪級數解法找到其中一個解，因當 $r = 1$ 時，冪級數解法是怎麼樣解也解不出來的。現在，因 $r = 0$，故式(2*b*)-(2*d*)可改寫為：

$$\begin{cases} (0-1)^2 a_0 - (0+1)(0)a_1 = 0 & (2b'') \\ 0^2 a_1 - (0+2)(0+1)a_2 = 0 & (2c'') \\ (0+1)^2 a_2 + (0+2)(0+3)a_3 = 0 & (2d'') \\ \quad\vdots \end{cases}$$

由式$(2b'')$知：

$$a_0 - 0 = 0$$

故：

$$a_0 = 0$$

顯然這是有矛盾的，也就是說，以現在所示之解題方式推求其解，是不能找出問題之第二個解的。通常，這個時候，應嘗試另一種推求第二個解的方法，這個方法稱為降階法(*Reduction of Order*)。其實，任何題目只要能夠先找出第一個解，則第二個解總是能以降階法解析出來。但是，因為降階法的計算時間較長，所以一般情況下，降階法是擔任第二線的救火責任。

• 以降階法重新推導問題之第二個解

由降階法知，若 y_1 與 y_2 互為線性獨立，則其相除的結果會與變數 x 有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x)$$

現在，考慮 $y_1 = x$，則：

$$y_2 = xu$$

再將上式代回原式，則：

$$\left(x^2-x\right)(xu)''-x(xu)'+(xu)=0$$

上式可化簡為：

$$\left(x^2-x\right)\left(2u'+xu''\right)-x\left(u+xu'\right)+(xu)=0$$

故：

$$\left(x^3-x^2\right)u''+\left(2x^2-2x-x^2\right)u'=0$$

因此：

$$\left(x^3-x^2\right)u''=\left(-x^2+2x\right)u'$$

或：

$$\frac{u''}{u'}=\frac{-x+2}{x^2-x}=-\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}$$

上式等號左右兩邊同時對變數 x 作積分，則：

$$\int\frac{u''}{u'}dx=-\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx$$

在以降階法推求第二個解之過程，並不需要加積分常數。若讀者覺得一定要加，也會得出相同之最後的通解(*General Solution*)。上式之積分結果為：

$$\ln u'=-2\ln x+\ln(x-1)$$

合併等號右邊之兩個項次後可知：

$$\ln u'=\ln\frac{x-1}{x^2}$$

故：

$$u' = \frac{x-1}{x^2}$$

再對上式作對 x 變數的積分，即可求出$u(x)$：

$$\int u'dx = \int \frac{x-1}{x^2}dx$$

其積分結果爲：

$$u = \ln x + \frac{1}{x}$$

因問題之第二個解爲 $y_2 = xu$ ，故：

$$\boxed{y_2 = x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) = x\ln x + 1} \tag{4}$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式爲線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$\boxed{y = C_1 x + C_2(x\ln x + 1)}$$

範例二
試求微分方程式 $xy''+y=0$ 之解。

解答：

令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $xy''+y=0$ ，則：

$$x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0 \qquad (1)$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)''+\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)=0 \qquad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&x\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\&\quad+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{lllll}r(r-1)a_0x^{r-1} & +a_1(r+1)rx^r & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+1} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+2} & +\cdots\\ & +a_0x^r & +a_1x^{r+1} & +a_2x^{r+2} & +\cdots=0\end{array}$$

因 x^{r-1} 、 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 = 0 & (2a) \\ (r+1)ra_1 + a_0 = 0 & (2b) \\ (r+2)(r+1)a_2 + a_1 = 0 & (2c) \\ (r+3)(r+2)a_3 + a_2 = 0 & (2d) \\ \vdots \end{cases}$$

由定理知，$a_0 \neq 0$，故式(2*a*)應改寫爲：

$$r(r-1) = 0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = 0,\ 1}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下，a_0、a_1、a_2、a_3、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1$ 的情況，然後再說明 $r = 0$ 的情況。

❶ 當 $r = 1$ 時

因 $r = 1$，故式(2*b*)-(2*d*)可改寫爲：

$$\begin{cases} (1+1)(1)a_1 + a_0 = 0 & (2b') \\ (1+2)(1+1)a_2 + a_1 = 0 & (2c') \\ (1+3)(1+2)a_3 + a_2 = 0 & (2d') \\ \vdots \end{cases}$$

由式(2*b*’)知：

$$2a_1 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_1 = -\frac{1}{2}a_0}$$

將 $a_1 = -\frac{1}{2}a_0$ 代入式(2*c*')，則式(2*c*')應改寫爲：

$$6a_2 + a_1 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{12}a_0}$$

再將 $a_2 = \frac{1}{12}a_0$ 代入式(2*d*')，可知：

$$12a_3 + a_2 = 0$$

故：

$$\boxed{a_3 = -\frac{1}{12}a_2 = -\frac{1}{144}a_0}$$

基於此，問題之第一個解可表爲：

$$\boxed{y(x) = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{144}x^3 + - \cdots\right)} \qquad (3)$$

❷ 當 $r = 0$ 時

當 $r = 0$ 時，表 *Frobenius* 解法可以冪級數解法(*Power Series Method*)取代。但也只能以冪級數解法找到其中一個解，因當 $r = 1$ 時，冪級數解法是怎麼樣解也解不出來的。現在，因 $r = 0$，故式(2*b*)-(2*d*)可改寫爲：

$$\begin{cases} (0+1)(0)a_1 + a_0 = 0 & (2b'') \\ (0+2)(0+1)a_2 + a_1 = 0 & (2c'') \\ (0+3)(0+2)a_3 + a_2 = 0 & (2d'') \\ \qquad \vdots & \end{cases}$$

由式$(2b'')$知：

$$a_0 = 0$$

顯然這是有矛盾的，也就是說，以現在所示之解題方式推求其解，是不能找出問題之第二個解的。通常，這個時候，應嘗試另一種推求第二個解的方法，這個方法稱爲**降階法**(*Reduction of Order*)。其實，任何題目只要能夠先找出第一個解，則第二個解總是能以降階法解析出來。但是，因爲降階法的計算時間較長，所以一般情況下，降階法是擔任第二線的救火責任。

• 以降階法重新推導問題之第二個解

由降階法知，若y_1與y_2互爲線性獨立，則其相除的結果會與變數x有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x)$$

現在，考慮$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{144}x^3 + - \cdots$，則：

$$y_2 = u\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{144}x^3 + - \cdots\right)$$

再將上式代回原式，則：

$$x(uy_1)'' + (uy_1) = 0$$

上式可化簡爲：

$$x(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + (uy_1) = 0$$

$$\Rightarrow \; u(xy_1'' + y_1) + x(u''y_1 + 2u'y_1') = 0$$

因y_1爲問題之解，故上式中之$xy_1'' + y_1 = 0$。因此，上式可化簡爲：

$$u''y_1 + 2u'y_1' = 0$$

$$\Rightarrow \quad u''y_1 = -2u'y_1'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u''}{u'} = -2\frac{y_1'}{y_1}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{u''}{u'}dx = -2\int \frac{y_1'}{y_1}dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln u' = -2\ln y_1 = \ln \frac{1}{y_1^2}$$

故：

$$u' = \frac{1}{y_1^2}$$

因此：

$$u = \int \frac{1}{y_1^2}dx$$

或：

$$u = \int \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{144}x^3 + - \cdots\right)^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad u = \int \frac{1}{x^2 - x^3 + \frac{5}{12}x^4 - + \cdots}dx$$

$$\Rightarrow \quad u = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{7}{12} + \frac{19}{72}x + \cdots\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad u = -\frac{1}{x} + \ln x + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots$$

在以降階法推求第二個解之過程，並不需要加積分常數。若讀者覺得一定要加，也會得出相同之最後的通解(*General Solution*)。根據上式之積分結果，可得問題之第二個解 $y_2 = uy_1$ 爲：

$$\boxed{y_2 = \left(-\frac{1}{x} + \ln x + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{144}x^3 + - \cdots\right)}$$

或

$$y_2=\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{144}x^3+-\cdots\right)\ln x$$
$$+\left(-\frac{1}{x}+\frac{7}{12}x+\frac{19}{144}x^2+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{144}x^3+-\cdots\right)$$

或

$$\begin{aligned}y_2&=\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{144}x^3+-\cdots\right)\ln x\\&\quad+\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{144}x^3+-\cdots\right)\left(-\frac{1}{x}+\frac{7}{12}x+\frac{19}{144}x^2+\cdots\right)\end{aligned}\tag{4}$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式爲線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

其中

$$y_1=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{144}x^3+-\cdots$$
$$y_2=\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{144}x^3+-\cdots\right)\ln x$$
$$+\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{144}x^3+-\cdots\right)\left(-\frac{1}{x}+\frac{7}{12}x+\frac{19}{144}x^2+\cdots\right)$$