提要 123：*Frobenius* 解法---案例 3(a)，$r_1 \neq r_2$，$r_1 - r_2 =$ 整數，通解不含 $\ln x$ 項

這裏是 *Frobenius* 解法的進一步說明，這是一個定理，筆者擬先將所可能面對的三種案例、四種情況先整理出來，再針對第三種案例之情況(a)以範例加以詳細說明。

定理：*Frobenius* 解法
令 r_1 與 r_2 為 *Indicial* 方程式 $r(r-1)+b_0 r + c_0 = 0$ 之兩個根。
案例 1. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 \neq$ 整數
$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$
案例 2. $r_1 = r_2 = r$
$$\begin{cases} y_1 = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right), \quad x > 0 \end{cases}$$
案例 3. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 =$ 整數
情況(a)：不含 $\ln x$ 項
$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$
情況(b)：含 $\ln x$ 項
$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

以下擬針對案例 3(a)之情況，以範例加以說明。

範例一
試求微分方程式$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$之解。

解答：

令問題之解為：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&\quad+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&\quad+\left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)''+x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)'+\left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)=0\tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\&\quad+x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\&\quad+\left(x^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{lllll}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots \\
+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots \\
 & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots \\
-\frac{1}{4}a_0x^r & -\frac{1}{4}a_1x^{r+1} & -\frac{1}{4}a_2x^{r+2} & -\frac{1}{4}a_3x^{r+3} & -\cdots=0
\end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}
r(r-1)a_0+a_0r-\frac{1}{4}a_0=0 \\
(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\frac{1}{4}a_1=0 \\
(r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0-\frac{1}{4}a_2=0 \\
(r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1-\frac{1}{4}a_3=0 \\
(r+4)(r+3)a_4+(r+4)a_4+a_2-\frac{1}{4}a_4=0 \\
\vdots
\end{cases}$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases}
\left(r^2-\frac{1}{4}\right)a_0=0 & (2a) \\
(r+1)^2a_1-\frac{1}{4}a_1=0 & (2b) \\
\left[(r+2)^2-\frac{1}{4}\right]a_2+a_0=0 & (2c) \\
\left[(r+3)^2-\frac{1}{4}\right]a_3+a_1=0 & (2d) \\
\left[(r+4)^2-\frac{1}{4}\right]a_4+a_2=0 & (2e) \\
\vdots
\end{cases}$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故式$(2a)$應改寫爲：

$$r^2-\frac{1}{4}=0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r=1/2,\,-1/2}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下， a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、…等係數間之關

係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1/2$ 的情況，然後再說明 $r = -1/2$ 的情況。

❶ 當 $r = 1/2$ 時

因 $r = 1/2$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫為：

$$\begin{cases} \left(\tfrac{1}{2}+1\right)^2 a_1 - \tfrac{1}{4} a_1 = 0 & (2b') \\ \left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c') \\ \left[\left(\tfrac{1}{2}+3\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d') \\ \left[\left(\tfrac{1}{2}+4\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e') \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

由式(2*b*')知：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將 $a_1 = 0$ 代入式(2*d*')，則由式(2*d*')可得：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$ 之結果。另外由式(2*c*')，可知：

$$6a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{6}a_0}$$

再將 $a_2 = -\frac{1}{6}a_0$ 之結果代入式(2*e*')，則式(2*e*')需調整為：

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}+4\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_4-\frac{1}{6}a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_4=\frac{1}{120}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned}
y(x)&=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\\
&=a_0x^{1/2}-\frac{1}{6}a_0x^{5/2}+\frac{1}{120}a_0x^{9/2}+\cdots\\
&=a_0x^{1/2}\left(1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4+\cdots\right)
\end{aligned}$$

由 *Taylor* 級數展開觀念知：

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-+\cdots$$

故問題之第一個解為：

$$\boxed{y(x)=a_0x^{-1/2}\sin x} \tag{3}$$

❷ 當 $r=-1/2$ 時

因 $r=-1/2$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫為：

$$\begin{cases}
\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)^2a_1-\tfrac{1}{4}a_1=0 & (2b'')\\
\left[\left(-\tfrac{1}{2}+2\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_2+a_0=0 & (2c'')\\
\left[\left(-\tfrac{1}{2}+3\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_3+a_1=0 & (2d'')\\
\left[\left(-\tfrac{1}{2}+4\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_4+a_2=0 & (2e'')\\
\qquad\vdots
\end{cases}$$

由式(2b”)知：

$$\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_1=0$$

故a_1應爲任意值，即：

$$\boxed{a_1=\text{任意值}}$$

將a_1代入式(2d”)，則由式(2d”)可得：

$$\left[\left(-\tfrac{1}{2}+3\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_3+a_1=0$$

整理後可得：

$$a_3=-\frac{1}{6}a_1$$

另外由式(2c”)，可知：

$$2a_2+a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_2=-\frac{1}{2}a_0}$$

再將$a_2=-\dfrac{1}{2}a_0$之結果代入式(2e”)，則式(2e”)需調整爲：

$$12a_4-\frac{1}{2}a_0=0$$

故：

$$\boxed{a_4=\frac{1}{24}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\
&= a_0 x^{-1/2} + a_1 x^{1/2} - \frac{1}{2} a_0 x^{3/2} - \frac{1}{6} a_1 x^{5/2} + \frac{1}{24} a_0 x^{7/2} + \cdots \\
&= a_0 x^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots\right) + a_1 x^{-1/2}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots\right)
\end{aligned}
$$

由 Taylor 級數展開觀念知：

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots$$

故問題之第二個解爲：

$$\boxed{y(x) = x^{-1/2}\left(a_0 \cos x + a_1 \sin x\right)} \tag{4}$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式爲線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$y(x) = \tilde{C}_1 a_0 x^{-1/2} \sin x + \tilde{C}_2 x^{-1/2}\left(a_0 \cos x + a_1 \sin x\right)$$

經整理後，通解可表爲：

$$\boxed{y(x) = x^{-1/2}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)}$$

其中 $C_1 = \tilde{C}_2 a_0$ ，$C_2 = \tilde{C}_1 a_0 + \tilde{C}_2 a_1$ 。

範例二
試求微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$ 之解。

解答：

此題目只是將範例一中之 $\frac{1}{4}$ 改為 $\frac{1}{9}$，直覺上問題的屬性及其答案應與範例一相似。然而，問題的屬性並不相同，範例一是屬於案例 3【$r_1\neq r_2$，且 $r_1-r_2=$ 整數】之情況(a)【不含 $\ln x$ 項】，因範例一中之 $r_1=\frac{1}{2}$ 、 $r_2=-\frac{1}{2}$ ，且其解為 $y(x)=x^{-1/2}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$；但本題範例二應屬於案例 1【$r_1\neq r_2$，且 $r_1-r_2\neq$ 整數】之情況，因範例二中之 $r_1=\frac{1}{3}$ 、 $r_2=-\frac{1}{3}$ ，且其解為 $y(x)=C_1x^{-2/3}\left(x-\dfrac{3}{16}x^3+\dfrac{9}{896}x^5-+\cdots\right)+C_2x^{-1/3}\left(1-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{9}{320}x^4-+\cdots\right)$。以下詳細說明本題範例二之解題過程。

首先，令問題之解為：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$ ，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)''+x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)'+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)=0\qquad(1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\&+x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\&+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{ccccc}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots\\
+a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots\\
 & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots\\
-\tfrac{1}{9}a_0x^r & -\tfrac{1}{9}a_1x^{r+1} & -\tfrac{1}{9}a_2x^{r+2} & -\tfrac{1}{9}a_3x^{r+3} & -\cdots=0
\end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}r(r-1)a_0+a_0r-\tfrac{1}{9}a_0=0\\(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\tfrac{1}{9}a_1=0\\(r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0-\tfrac{1}{9}a_2=0\\(r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1-\tfrac{1}{9}a_3=0\\(r+4)(r+3)a_4+(r+4)a_4+a_2-\tfrac{1}{9}a_4=0\\\qquad\vdots\end{cases}$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases}\left(r^2-\tfrac{1}{9}\right)a_0=0 & (2a)\\(r+1)^2a_1-\tfrac{1}{9}a_1=0 & (2b)\\\left[(r+2)^2-\tfrac{1}{9}\right]a_2+a_0=0 & (2c)\\\left[(r+3)^2-\tfrac{1}{9}\right]a_3+a_1=0 & (2d)\\\left[(r+4)^2-\tfrac{1}{9}\right]a_4+a_2=0 & (2e)\\\qquad\vdots\end{cases}$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故式(2a)應改寫爲：

$$r^2 - \tfrac{1}{9} = 0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = 1/3,\ -1/3}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下， a_0 、a_1 、a_2 、a_3 、...等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1/3$ 的情況，然後再說明 $r = -1/3$ 的情況。

❶ 當 $r = 1/3$ 時

因 $r = 1/3$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫爲：

$$\begin{cases} \left(\tfrac{1}{3}+1\right)^2 a_1 - \tfrac{1}{9} a_1 = 0 & (2b') \\ \left[\left(\tfrac{1}{3}+2\right)^2 - \tfrac{1}{9}\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c') \\ \left[\left(\tfrac{1}{3}+3\right)^2 - \tfrac{1}{9}\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d') \\ \left[\left(\tfrac{1}{3}+4\right)^2 - \tfrac{1}{9}\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e') \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

由式(2*b*’)知：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將 $a_1 = 0$ 代入式(2*d*’)，則由式(2*d*’)可得：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$ 之結果。另外由式(2*c*’)，可知：

$$\frac{16}{3}a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{3}{16}a_0}$$

再將 $a_2 = -\frac{3}{16}a_0$ 之結果代入式(2e’)，則式(2e’)需調整爲：

$$\left[\left(\tfrac{1}{3}+4\right)^2 - \tfrac{1}{9}\right]a_4 - \frac{3}{16}a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{56}{3}a_4 - \frac{3}{16}a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{9}{896}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots \\ &= a_0x^{1/3} - \frac{3}{16}a_0x^{7/3} + \frac{9}{896}a_0x^{13/3} - + \cdots \\ &= a_0x^{1/3}\left(1 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{9}{896}x^4 - + \cdots\right) \\ &= a_0x^{-2/3}\left(x - \frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{896}x^5 - + \cdots\right) \end{aligned}$$

故問題之第一個解爲：

$$\boxed{y(x) = a_0x^{-2/3}\left(x - \frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{896}x^5 - + \cdots\right)} \qquad (3)$$

❷ 當 $r=-1/3$ 時

因 $r=-1/2$，故式(2b)-(2e)可改寫爲：

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{3}+1\right)^2 a_1 - \frac{1}{9}a_1 = 0 & (2b'') \\ \left[\left(-\frac{1}{3}+2\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c'') \\ \left[\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d'') \\ \left[\left(-\frac{1}{3}+4\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e'') \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

由式(2b”)知：

$$\frac{4}{9}a_1 - \frac{1}{9}a_1 = 0$$

故

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將 a_1 代入式(2d”)，則由式(2d”)可得：

$$\left[\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_3 + a_1 = 0$$

整理後可得：

$$a_3 = -\frac{1}{7}a_1 = 0$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$ 之結果。另外由式(2c”)，可知：

$$\frac{8}{3}a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{3}{8} a_0}$$

再將 $a_2 = -\frac{3}{8} a_0$ 之結果代入式(2*e*”)，則式(2*e*”)需調整爲：

$$\frac{40}{3} a_4 - \frac{3}{8} a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{9}{320} a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + a_3 x^{r+3} + a_4 x^{r+4} + \cdots \\ &= a_0 x^{-1/3} + a_1 x^{2/3} + a_2 x^{5/3} + a_3 x^{8/3} + a_4 x^{11/3} + \cdots \\ &= a_0 x^{-1/3} - \frac{3}{8} a_0 x^{5/3} + \frac{9}{320} a_0 x^{11/3} + \cdots \\ &= a_0 x^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{320} x^4 - + \cdots \right) \end{aligned}$$

故問題之第二個解爲：

$$\boxed{y(x) = a_0 x^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{320} x^4 - + \cdots \right)} \tag{4}$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式爲線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$y(x) = \tilde{C}_1 a_0 x^{-2/3} \left(x - \frac{3}{16} x^3 + \frac{9}{896} x^5 - + \cdots \right) + \tilde{C}_2 a_0 x^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{320} x^4 - + \cdots \right)$$

經整理後，通解可表爲：

$$\boxed{y(x)=C_1x^{-2/3}\left(x-\frac{3}{16}x^3+\frac{9}{896}x^5-+\cdots\right)+C_2x^{-1/3}\left(1-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{320}x^4-+\cdots\right)}$$

其中$C_1=\tilde{C}_1a_0$，$C_2=\tilde{C}_2a_0$。