提要 122：*Frobenius* 解法---案例 2，$r_1 = r_2 = r$

這裏是 *Frobenius* 解法的進一步說明，這是一個定理，筆者擬先將所可能面對的三種案例、四種情況先整理出來，再針對第二種案例以範例加以詳細說明。

定理：*Frobenius* 解法

令 r_1 與 r_2 爲 *Indicial* 方程式 $r(r-1)+b_0 r + c_0 = 0$ 之兩個根。

案例 1. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 \neq$ 整數

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

案例 2. $r_1 = r_2 = r$

$$\begin{cases} y_1 = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right), \quad x > 0 \end{cases}$$

案例 3. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 =$ 整數

情況(a)：不含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

情況(b)：含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

以下擬針對案例 2 之情況，以範例加以說明。

範例一：案例 2 之說明
試求微分方程式$\left(x^2-x\right)y''+(3x-1)y'+y=0$之解。

解答：

令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式$\left(x^2-x\right)y''+(3x-1)y'+y=0$，則：

$$\begin{aligned}&\left(x^2-x\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&\quad+(3x-1)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&\quad+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$\left(x^2-x\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)''+(3x-1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)'+\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)=0 \qquad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&\left(x^2-x\right)\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\&\quad+(3x-1)\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\&\quad+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +\cdots \\
-r(r-1)a_0x^{r-1} & -a_1(r+1)rx^r & -a_2(r+2)(r+1)x^{r+1} & -a_3(r+3)(r+2)x^{r+2} & -\cdots \\
 & +3a_0rx^r & +3a_1(r+1)x^{r+1} & +3a_2(r+2)x^{r+2} & +\cdots \\
-a_0rx^{r-1} & -a_1(r+1)x^r & -a_2(r+2)x^{r+1} & -a_3(r+3)x^{r+2} & -\cdots \\
 & +a_0x^r & +a_1x^{r+1} & +a_2x^{r+2} & +\cdots=0
\end{array}
$$

因 x^{r-1} 、 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
-r(r-1)a_0-ra_0=0 \\
r(r-1)a_0-(r+1)ra_1+3ra_0-(r+1)a_1+a_0=0 \\
(r+1)ra_1-(r+2)(r+1)a_2+3(r+1)a_1-(r+2)a_2+a_1=0 \\
(r+2)(r+1)a_2-(r+3)(r+2)a_3+3(r+2)a_2-(r+3)a_3+a_2=0 \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式可再整理爲：

$$
\begin{cases}
r^2a_0=0 & (2a) \\
(r+1)^2a_0-(r+1)^2a_1=0 & (2b) \\
(r+2)^2a_1-(r+2)^2a_2=0 & (2c) \\
(r+3)^2a_2-(r+3)^2a_3=0 & (2d) \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故式$(2a)$應改寫爲：

$$
r^2=0
$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$
\boxed{r=0,\ 0}
$$

這是重根情況，發生重根時，第一個解 y_1 應可以很順利求得，但是第二個解 y_2 就需要引用降階法(*Reduction of Order*)才算得出來。

❶ 當 $r=0$ 時

因 $r=0$，故式(2b)-(2d)可改寫為：

$$\begin{cases} a_0 - a_1 = 0 & (2b') \\ a_1 - a_2 = 0 & (2c') \\ a_2 - a_3 = 0 & (2d') \\ \quad\quad\vdots \end{cases}$$

由式(2b')知：

$$a_1 = a_0$$

將 $a_1 = a_0$ 代入式(2c')，則式(2c')可得：

$$a_2 = a_0$$

再將 $a_2 = a_0$ 代入式(2d')，可知：

$$a_3 = a_0$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_4 = a_5 = a_6 = \cdots = a_0}$ 之結果。基於此，問題之第一個解可表為：

$$\boxed{y(x) = a_0\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right)} \tag{3}$$

❷ 當 $r=$ 第二個 0 時，需採用降階法求解

由降階法知，若 y_1 與 y_2 互為線性獨立，則其相除的結果會與變數 x 有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x) \tag{4}$$

現在，考慮 $y_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$，由幾何級數觀念知，$y_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$，則：

$$y_2 = \frac{1}{1-x} u \tag{5}$$

先將 y_2 表為 $y_2 = uy_1$，再將上式代回原式，則：

$$\left(x^2 - x\right)\left(uy_1\right)'' + \left(3x-1\right)\left(uy_1\right)' + \left(uy_1\right) = 0$$

上式可化簡為：

$$\left(x^2 - x\right)\left(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''\right) + \left(3x-1\right)\left(u'y_1 + uy_1'\right) + \left(uy_1\right) = 0$$

上式可整理為：

$$\left[\left(x^2 - x\right)y_1\right]u'' + \left[2\left(x^2 - x\right)y_1' + \left(3x-1\right)y_1\right]u' + \left[\left(x^2 - x\right)y_1'' + \left(3x-1\right)y_1' + y_1\right]u = 0 \tag{6}$$

因 y_1 是原微分方程式的解，故：

$$\left(x^2 - x\right)y_1'' + \left(3x-1\right)y_1' + y_1 = 0$$

所以式(6)可調整為：

$$\left[\left(x^2 - x\right)y_1\right]u'' + \left[2\left(x^2 - x\right)y_1' + \left(3x-1\right)y_1\right]u' = 0$$

再將 $y_1(x) = \frac{1}{1-x}$ 代入上式，則：

$$\left[\left(x^2 - x\right)\frac{1}{1-x}\right]u'' + \left[2\left(x^2 - x\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)' + \left(3x-1\right)\frac{1}{1-x}\right]u' = 0$$

上式中之微分項處理完後，可得：

$$\left[x\left(x-1\right)\frac{1}{1-x}\right]u'' + \left[2x\left(x-1\right)\frac{1}{\left(1-x\right)^2} + \left(3x-1\right)\frac{1}{1-x}\right]u' = 0$$

繼續化簡後，應表爲：

$$-xu''+\frac{2x^2-2x-3x^2+4x-1}{(1-x)^2}u'=0$$

或：

$$-xu''-u'=0$$

可準備求出u'了，因爲：

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}$$

故上式等號左右兩邊同時對變數 x 作積分後，可得：

$$\int\frac{u''}{u'}dx=-\int\frac{1}{x}dx$$

在以降階法推求第二個解之過程，並不需要加積分常數。若讀者覺得一定要加，也會得出相同之最後的通解(*General Solution*)。上式之積分結果爲：

$$\ln u'=-\ln x=\ln\frac{1}{x}$$

故：

$$u'=\frac{1}{x}$$

再對上式作對 x 變數的積分，即可求出$u(x)$：

$$\int u'dx=\int\frac{1}{x}dx$$

其積分結果爲：

$$u = \ln x$$

因問題之第二個解爲 $y_2 = \dfrac{u}{1-x}$，故：

$$\boxed{y_2 = \frac{\ln x}{1-x}} \tag{7}$$

式(3)與式(7)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式爲線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(7)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$\boxed{y = C_1 \frac{1}{1-x} + C_2 \frac{\ln x}{1-x}}$$

範例二：案例 2 之說明
試求微分方程式$\left(x^2+x\right)y''+\left(3x+1\right)y'+y=0$之解。

解答：

令問題之解為：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式$\left(x^2+x\right)y''+\left(3x+1\right)y'+y=0$，則：

$$\begin{aligned}&\left(x^2+x\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&+\left(3x+1\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$\left(x^2+x\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)''+\left(3x+1\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)'+\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}\right)=0\tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&\left(x^2+x\right)\left[r\left(r-1\right)a_0x^{r-2}+a_1\left(r+1\right)rx^{r-1}+a_2\left(r+2\right)\left(r+1\right)x^r+\cdots\right]\\&+\left(3x+1\right)\left[ra_0x^{r-1}+a_1\left(r+1\right)x^r+a_2\left(r+2\right)x^{r+1}+\cdots\right]\\&+\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +\cdots \\
+r(r-1)a_0x^{r-1} & +a_1(r+1)rx^r & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+1} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+2} & +\cdots \\
 & +3a_0rx^r & +3a_1(r+1)x^{r+1} & +3a_2(r+2)x^{r+2} & +\cdots \\
+a_0rx^{r-1} & +a_1(r+1)x^r & +a_2(r+2)x^{r+1} & +a_3(r+3)x^{r+2} & -\cdots \\
 & +a_0x^r & +a_1x^{r+1} & +a_2x^{r+2} & +\cdots=0
\end{array}
$$

因 x^{r-1} 、 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
r(r-1)a_0+ra_0=0 \\
r(r-1)a_0+(r+1)ra_1+3ra_0+(r+1)a_1+a_0=0 \\
(r+1)ra_1+(r+2)(r+1)a_2+3(r+1)a_1+(r+2)a_2+a_1=0 \\
(r+2)(r+1)a_2+(r+3)(r+2)a_3+3(r+2)a_2+(r+3)a_3+a_2=0 \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式可再整理爲：

$$
\begin{cases}
r^2a_0=0 & (2a) \\
(r+1)^2a_0+(r+1)^2a_1=0 & (2b) \\
(r+2)^2a_1+(r+2)^2a_2=0 & (2c) \\
(r+3)^2a_2+(r+3)^2a_3=0 & (2d) \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故式$(2a)$應改寫爲：

$$r^2=0$$

上面這個方程式稱爲 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r=0,\,0}$$

這是重根情況，發生重根時，第一個解 y_1 應可以很順利求得，但是第二個解 y_2 就需要引用降階法(*Reduction of Order*)才算得出來。

❶ 當 $r = 0$ 時

因 $r = 0$，故式(2*b*)-(2*d*)可改寫爲：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 & (2b') \\ a_1 + a_2 = 0 & (2c') \\ a_2 + a_3 = 0 & (2d') \\ \quad\vdots \end{cases}$$

由式(2*b*')知：

$$a_1 = -a_0$$

將 $a_1 = a_0$ 代入式(2*c*')，則式(2*c*')可得：

$$a_2 = a_0$$

再將 $a_2 = a_0$ 代入式(2*d*')，可知：

$$a_3 = -a_0$$

依此類推，應可求出 $a_4 = a_0$ 、 $a_5 = -a_0$ 、 $a_6 = a_0$ 等之結果。基於此，問題之第一個解可表爲：

$$\boxed{y(x) = a_0\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + -\cdots\right)} \tag{3}$$

❷ 當 $r =$ 第二個 0 時，需採用降階法求解

由降階法知，若 y_1 與 y_2 互爲線性獨立，則其相除的結果會與變數 x 有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x) \tag{4}$$

現在，考慮 $y_1(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + -\cdots$，由幾何級數觀念知，

$y_1(x)=\dfrac{1}{1+x}$，則：

$$y_2=\frac{1}{1+x}u \tag{5}$$

先將 y_2 表爲 $y_2=uy_1$，再將上式代回原式，則：

$$\left(x^2+x\right)\left(uy_1\right)''+\left(3x+1\right)\left(uy_1\right)'+\left(uy_1\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(x^2+x\right)\left(u''y_1+2u'y_1'+uy_1''\right)+\left(3x+1\right)\left(u'y_1+uy_1'\right)+\left(uy_1\right)=0$$

上式可整理爲：

$$\left[\left(x^2+x\right)y_1\right]u''+\left[2\left(x^2+x\right)y_1'+\left(3x+1\right)y_1\right]u'+\left[\left(x^2+x\right)y_1''+\left(3x+1\right)y_1'+y_1\right]u=0 \tag{6}$$

因 y_1 是原微分方程式的解，故：

$$\left(x^2+x\right)y_1''+\left(3x+1\right)y_1'+y_1=0$$

所以式(6)可調整爲：

$$\left[\left(x^2+x\right)y_1\right]u''+\left[2\left(x^2+x\right)y_1'+\left(3x+1\right)y_1\right]u'=0$$

再將 $y_1(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 代入上式，則：

$$\left[\left(x^2+x\right)\frac{1}{1+x}\right]u''+\left[2\left(x^2+x\right)\left(\frac{1}{1+x}\right)'+\left(3x+1\right)\frac{1}{1+x}\right]u'=0$$

上式中之微分項處理完後，可得：

$$\left[x(x+1)\frac{1}{1+x}\right]u''+\left[-2x(x+1)\frac{1}{(1+x)^2}+(3x+1)\frac{1}{1+x}\right]u'=0$$

繼續化簡後，應表爲：

$$xu''+\frac{-2x+3x+1}{1+x}u'=0$$

或：

$$xu''+u'=0$$

可準備求出u'了，因爲：

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}$$

故上式等號左右兩邊同時對變數 x 作積分後，可得：

$$\int\frac{u''}{u'}dx=-\int\frac{1}{x}dx$$

在以降階法推求第二個解之過程，並不需要加積分常數。若讀者覺得一定要加，也會得出相同之最後的通解(*General Solution*)。上式之積分結果爲：

$$\ln u'=-\ln x=\ln\frac{1}{x}$$

故：

$$u'=\frac{1}{x}$$

再對上式作對 x 變數的積分，即可求出$u(x)$：

$$\int u'dx = \int \frac{1}{x}dx$$

其積分結果為：

$$u = \ln x$$

因問題之第二個解為 $y_2 = \dfrac{u}{1+x}$ ，故：

$$\boxed{y_2 = \frac{\ln x}{1+x}} \tag{7}$$

式(3)與式(7)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式為線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(7)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$\boxed{y = C_1\frac{1}{1+x} + C_2\frac{\ln x}{1+x}}$$