提要 121：*Frobenius* 解法---案例 1，$r_1 \neq r_2$，$r_1 - r_2 \neq$ 整數

這裏是 *Frobenius* 解法的進一步說明，這是一個定理，筆者擬先將所可能面對的三種案例、四種情況先整理出來，再針對第一種案例以範例加以詳細說明。

定理：*Frobenius* 解法

令 r_1 與 r_2 爲 *Indicial* 方程式 $r(r-1)+b_0 r+c_0=0$ 之兩個根。

案例 1. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 \neq$ 整數

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

案例 2. $r_1 = r_2 = r$

$$\begin{cases} y_1 = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right), \quad x > 0 \end{cases}$$

案例 3. $r_1 \neq r_2$，且 $r_1 - r_2 =$ 整數

情況(a)：不含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

情況(b)：含 $\ln x$ 項

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right) \end{cases}$$

以下擬針對案例 1 之情況，以範例加以說明。

範例一：案例 1 之說明
試求微分方程式 $x^2 y'' - \frac{1}{2} x y' + \frac{1}{2} y = 0$ 之解。

解答：

令問題之解爲：

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2 y'' - \frac{1}{2} x y' + \frac{1}{2} y = 0$ ，則：

$$\begin{aligned} & x^2 \left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right)'' \\ & -\frac{1}{2} x \left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right)' \\ & +\frac{1}{2} \left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right)'' - \frac{1}{2} x \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right)' + \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right) = 0 \tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned} & x^2 \left[r(r-1) a_0 x^{r-2} + a_1 (r+1) r x^{r-1} + a_2 (r+2)(r+1) x^r + \cdots\right] \\ & -\frac{1}{2} x \left[r a_0 x^{r-1} + a_1 (r+1) x^r + a_2 (r+2) x^{r+1} + \cdots\right] \\ & +\frac{1}{2} \left(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots\right) = 0 \end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{llll} r(r-1) a_0 x^r & + a_1 (r+1) r x^{r+1} & + a_2 (r+2)(r+1) x^{r+2} & + \cdots \\ -\frac{1}{2} a_0 r x^r & -\frac{1}{2} a_1 (r+1) x^{r+1} & -\frac{1}{2} a_2 (r+2) x^{r+2} & - \cdots \\ +\frac{1}{2} a_0 x^r & +\frac{1}{2} a_1 x^{r+1} & +\frac{1}{2} a_2 x^{r+2} & + \cdots = 0 \end{array}$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
r(r-1)a_0 - \dfrac{1}{2}ra_0 + \dfrac{1}{2}a_0 = 0 \\
(r+1)ra_1 - \dfrac{1}{2}(r+1)a_1 + \dfrac{1}{2}a_1 = 0 \\
(r+2)(r+1)a_2 - \dfrac{1}{2}(r+1)a_2 + \dfrac{1}{2}a_2 = 0 \\
\qquad\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式可再整理為：

$$
\begin{cases}
\left(r^2 - \dfrac{3}{2}r + \dfrac{1}{2}\right)a_0 = 0 & (2a) \\
\left(r^2 + \dfrac{1}{2}r\right)a_1 = 0 & (2b) \\
\left(r^2 + \dfrac{5}{2}r + 2\right)a_2 = 0 & (2c) \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由定理知，$a_0 \neq 0$，故式(2*a*)應改寫為：

$$
r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0
$$

上面這個方程式稱為 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$
\boxed{r = 1/2,\ 1}
$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下，a_0、a_1、a_2、a_3、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1$ 的情況，然後再說明 $r = 1/2$ 的情況。

❶ 當 $r = 1$ 時

因 $r = 1$，故式(2*b*)-(2*c*)可改寫為：

$$
\begin{cases}
\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)a_1 = 0 & (2b') \\
\left(1 + \dfrac{5}{2} + 2\right)a_2 = 0 & (2c') \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

由式(2*b*')與式式(2*c*')知：

$$\boxed{a_1=0}，\boxed{a_2=0}$$

依此類推，應可求出$\boxed{a_3=a_4=a_5=a_6=\cdots=0}$之結果。基於此，問題之第一個解可表為：

$$\boxed{y(x)=a_0x} \tag{3}$$

❷ 當 $r=1/2$ 時

當 $r=1/2$，式(2*b*)-(2*c*)可改寫為：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}r\right)a_1=0 & (2b'') \\ \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{8}+2\right)a_2=0 & (2c'') \\ \qquad\vdots & \end{cases}$$

由式$(2b'')$與式$(2c'')$知：

$$a_1=0，a_2=0$$

依此類推，應可求出$\boxed{a_3=a_4=a_5=a_6=\cdots=0}$之結果。基於此，問題之第二個解可表為：

$$\boxed{y(x)=a_0x^{1/2}} \tag{4}$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式為線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$\boxed{y=C_1x+C_2x^{1/2}}$$

另解

此題之題型屬於 Euler-Cauchy 方程式，故可考慮其解為$y(x)=x^m$。將其代回原式$x^2y''-\dfrac{1}{2}xy'+\dfrac{1}{2}y=0$，可得：

$$x^2\left(x^m\right)''-\frac{1}{2}x\left(x^m\right)'+\frac{1}{2}\left(x^m\right)=0$$

上式可進一步化簡爲：

$$x^2\left[m\left(m-1\right)x^{m-2}\right]-\frac{1}{2}x\left(mx^{m-1}\right)+\frac{1}{2}\left(x^m\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad m\left(m-1\right)x^m-\frac{m}{2}x^m+\frac{1}{2}x^m=0$$

$$\Rightarrow\quad \left[m\left(m-1\right)-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right]x^m=0$$

因爲 $x^m\neq 0$ ，所以 $m\left(m-1\right)-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}=0$ ，即 $m^2-\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}=0$ 。再因式分解爲 $\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-1\right)=0$ ，故 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=1$ ，即問題之解爲 $y\left(x\right)=x^{1/2}$ 或 $y\left(x\right)=x$ 。因原微分方程式爲線性且齊性的微分方程式，故可引用重疊原理(Superposition Principle)，將問題之通解(General Solution)表爲：

$$\boxed{y\left(x\right)=C_1x+C_2x^{1/2}}$$

以上所得之通解與 *Frobenius* 解法所得通解完全相同，然而目前的解法較爲簡易。

範例二
試求微分方程式$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$之解。

解答：

令問題之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$，則：

$$\begin{aligned}&x^2\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)''\\&+x\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)'\\&+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)''+x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)'+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}\right)=0\tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right]\\&+x\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right]\\&+\left(x^2-\tfrac{1}{9}\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{lllll}r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & +a_3(r+3)(r+2)x^{r+3} & +\cdots\\ +a_0rx^r & +a_1(r+1)x^{r+1} & +a_2(r+2)x^{r+2} & +a_3(r+3)x^{r+3} & +\cdots\\ & & +a_0x^{r+2} & +a_1x^{r+3} & +\cdots\\ -\tfrac{1}{9}a_0x^r & -\tfrac{1}{9}a_1x^{r+1} & -\tfrac{1}{9}a_2x^{r+2} & -\tfrac{1}{9}a_3x^{r+3} & -\cdots=0\end{array}$$

因x^r、x^{r+1}、x^{r+2}等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 + a_0 r - \frac{1}{9}a_0 = 0 \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \frac{1}{9}a_1 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 + (r+2)a_2 + a_0 - \frac{1}{9}a_2 = 0 \\ (r+3)(r+2)a_3 + (r+3)a_3 + a_1 - \frac{1}{9}a_3 = 0 \\ (r+4)(r+3)a_4 + (r+4)a_4 + a_2 - \frac{1}{9}a_4 = 0 \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

上式可再整理為：

$$\begin{cases} \left(r^2 - \frac{1}{9}\right)a_0 = 0 & (2a) \\ (r+1)^2 a_1 - \frac{1}{9}a_1 = 0 & (2b) \\ \left[(r+2)^2 - \frac{1}{9}\right]a_2 + a_0 = 0 & (2c) \\ \left[(r+3)^2 - \frac{1}{9}\right]a_3 + a_1 = 0 & (2d) \\ \left[(r+4)^2 - \frac{1}{9}\right]a_4 + a_2 = 0 & (2e) \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

由定理知， $a_0 \neq 0$ ，故式(2*a*)應改寫為：

$$r^2 - \frac{1}{9} = 0$$

上面這個方程式稱為 *Indicial* 方程式，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$\boxed{r = 1/3,\ -1/3}$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下， a_0 、a_1 、a_2 、a_3 、…等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1/3$ 的情況，然後再說明 $r = -1/3$ 的情況。

❶ 當 $r = 1/3$ 時

因 $r = 1/3$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫為：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}+1\right)^2 a_1 - \frac{1}{9} a_1 = 0 & (2b') \\ \left[\left(\frac{1}{3}+2\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c') \\ \left[\left(\frac{1}{3}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d') \\ \left[\left(\frac{1}{3}+4\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e') \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

由式(2*b*’)知：

$$\boxed{a_1 = 0}$$

將 $a_1 = 0$ 代入式(2*d*’)，則由式(2*d*’)可得：

$$\boxed{a_3 = 0}$$

依此類推，應可求出 $\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$ 之結果。另外由式(2*c*’)，可知：

$$\frac{16}{3} a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{3}{16} a_0}$$

再將 $a_2 = -\frac{3}{16} a_0$ 之結果代入式(2*e*’)，則式(2*e*’)需調整爲：

$$\left[\left(\frac{1}{3}+4\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_4 - \frac{3}{16} a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{56}{3} a_4 - \frac{3}{16} a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{9}{896} a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \\
&= a_0 x^{1/3} - \frac{3}{16} a_0 x^{7/3} + \frac{9}{896} a_0 x^{13/3} - + \cdots \\
&= a_0 x^{1/3} \left(1 - \frac{3}{16} x^2 + \frac{9}{896} x^4 - + \cdots \right) \\
&= a_0 x^{-2/3} \left(x - \frac{3}{16} x^3 + \frac{9}{896} x^5 - + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

故問題之第一個解爲：

$$
\boxed{y(x) = a_0 x^{-2/3} \left(x - \frac{3}{16} x^3 + \frac{9}{896} x^5 - + \cdots \right)} \tag{3}
$$

❷ 當 $r = -1/3$ 時

因 $r = -1/2$，故式(2*b*)-(2*e*)可改寫爲：

$$
\begin{cases}
\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2 a_1 - \frac{1}{9} a_1 = 0 & (2b'') \\
\left[\left(-\frac{1}{3}+2\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_2 + a_0 = 0 & (2c'') \\
\left[\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_3 + a_1 = 0 & (2d'') \\
\left[\left(-\frac{1}{3}+4\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_4 + a_2 = 0 & (2e'') \\
\quad \vdots &
\end{cases}
$$

由式(2*b*”)知：

$$
\frac{4}{9} a_1 - \frac{1}{9} a_1 = 0
$$

故

$$
\boxed{a_1 = 0}
$$

將 a_1 代入式(2*d*”)，則由式(2*d*”)可得：

$$
\left[\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\right] a_3 + a_1 = 0
$$

整理後可得：

$$a_3 = -\frac{1}{7}a_1 = 0$$

依此類推，應可求出$\boxed{a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0}$之結果。另外由式(2*c*”)，可知：

$$\frac{8}{3}a_2 + a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_2 = -\frac{3}{8}a_0}$$

再將$a_2 = -\frac{3}{8}a_0$之結果代入式(2*e*”)，則式(2*e*”)需調整爲：

$$\frac{40}{3}a_4 - \frac{3}{8}a_0 = 0$$

故：

$$\boxed{a_4 = \frac{9}{320}a_0}$$

基於以上之研討可知：

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + a_3x^{r+3} + a_4x^{r+4} + \cdots \\
&= a_0x^{-1/3} + a_1x^{2/3} + a_2x^{5/3} + a_3x^{8/3} + a_4x^{11/3} + \cdots \\
&= a_0x^{-1/3} - \frac{3}{8}a_0x^{5/3} + \frac{9}{320}a_0x^{11/3} + \cdots \\
&= a_0x^{-1/3}\left(1 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{320}x^4 - + \cdots\right)
\end{aligned}$$

故問題之第二個解爲：

$$\boxed{y(x) = a_0x^{-1/3}\left(1 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{320}x^4 - + \cdots\right)} \tag{4}$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個基底(*Basis*)。因原微分方程式爲線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$y(x) = \tilde{C}_1a_0x^{-2/3}\left(x - \frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{896}x^5 - + \cdots\right) + \tilde{C}_2a_0x^{-1/3}\left(1 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{320}x^4 - + \cdots\right)$$

經整理後，通解可表爲：

$$\boxed{y(x)=C_1x^{-2/3}\left(x-\frac{3}{16}x^3+\frac{9}{896}x^5-+\cdots\right)+C_2x^{-1/3}\left(1-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{320}x^4-+\cdots\right)}$$

其中 $C_1=\tilde{C}_1a_0$ ， $C_2=\tilde{C}_2a_0$ 。