提要 120：*Indicial* 方程式的推導

Indicial 方程式是解析微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 的過程中，所產生的一種特徵方程式(*Characteristic Equation*)。說明如下：

Indicial 方程式
Indicial 方程式係指： $$r(r-1)+b_0r+c_0=0$$ 其係解析微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 的過程中，所產生的一種特徵方程式。由 *Indicial* 方程式可解出兩個 r 值。

說明 *Indicial* 方程式的由來：

若考慮 $b(x)$ 與 $c(x)$ 在 $x=0$ 是解析的，則 $b(x)$ 與 $c(x)$ 可以 $x=0$ 爲中心點，將其分別表爲如下所示之冪級數(*Power Series*)：

$$b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$$

$$c(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

令微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 之解爲：

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots$$

再代回原微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ ，則：

$$\begin{aligned}&x^2(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots)''\\&+x(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots)'\\&+(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots)(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots)=0\end{aligned}\tag{1}$$

式(1)微分後，可得：

$$
\begin{aligned}
&x^2\left[r(r-1)a_0x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\right] \\
&\quad +x\left(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\right)\left[ra_0x^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\right] \\
&\quad +\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\right)\left(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\right)=0
\end{aligned}
$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$
\begin{array}{lll}
r(r-1)a_0x^r & +a_1(r+1)rx^{r+1} & +\cdots \\
+ra_0b_0x^r & +\left[a_0b_1r+a_1b_0(r+1)\right]x^{r+1} & +\cdots \\
+a_0c_0x^r & +\left(a_1c_0+a_0c_1\right)x^{r+1} & +\cdots=0
\end{array}
$$

因 x^r 、 x^{r+1} 、…等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$
\begin{cases}
r(r-1)a_0+ra_0b_0+a_0c_0=0 \\
(r+1)a_1+\left[a_0b_1r+a_1b_0(r+1)\right]+\left(a_1c_0+a_0c_1\right)=0 \\
\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{cases}
$$

上式中之第一個方程式可再整理爲：

$$
\left[r(r-1)+rb_0+c_0\right]a_0=0
$$

由定理知， $a_0\neq 0$ ，故上式應改寫爲：

$$
\boxed{r(r-1)+b_0r+c_0=0}
$$

上面這個方程式即爲 *Indicial* 方程式，實際上它就是特徵方程式的另一種稱呼方式。爲了應付考試，若讀者有能力將此方程式記下來，那就背下來吧！但也應瞭解其由來，以便萬一真的忘記了，也知道怎麼重新推導出來。

範例一
試求微分方程式 $x^2y''-\frac{1}{2}xy'+\frac{1}{2}y=0$ 之 *Indicial* 方程式。

解答：

將原微分方程式與標準化之微分方程式 $x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$ 作比較，則 $b(x)=-\frac{1}{2}$ 、 $c(x)=\frac{1}{2}$ 。因為

$$b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$$
$$c(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

故 $b_0=-\frac{1}{2}$ 、 $b_1=b_2=b_3=\cdots=0$ ， $c_0=\frac{1}{2}$ 、 $c_1=c_2=c_3=\cdots=0$ 。

由前面的討論知 *Indicial* 方程式可表為 $r(r-1)+b_0r+c_0=0$，故問題之 *Indicial* 方程式為

$$r(r-1)-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=0$$

上式可進一步化簡為：

$$\boxed{r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0}$$

此即為問題之 *Indicial* 方程式。