提要 119：正規點與奇異點之定義

正規點(*Regular Point*)與奇異點(*Singular Point*)之定義說明如下。

正規點(*Regular Point*)與奇異點(*Singular Point*)之定義
微分方程式 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 之正規點(*Regular Point*) x_0，係指能使 $p(x)$ 與 $q(x)$ 成為解析函數(*Analytic Function*)之點；若 x_0 並非此微分方程式之正規點，則 x_0 就稱為奇異點(*Singular Point*)。

註： $p(x)$ 與 $q(x)$ 在 x_0 是解析的，係指 $p(x)$ 與 $q(x)$ 可以表為如下所示之冪級數(*Power Series*)型式：

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots$$

$$q(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+b_3(x-x_0)^3+\cdots$$

範例一

試求微分方程式：(a) $\left(x^2+4\right)y''+xy'+y=0$　(b) $\left(x^2-1\right)y''-xy'+y=0$ 之正規點和奇異點。

解答：

(a) 原微分方程式 $\left(x^2+4\right)y''+xy'+y=0$ 可改寫為 $y''+\dfrac{x}{x^2+4}y'+\dfrac{1}{x^2+4}y=0$，所以 $p(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$，$q(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$，因任意實數均可代入 $p(x)$ 與 $q(x)$，即 $p(x)$ 與 $q(x)$ 在任意實數點均可解析，故本題並無奇異點，即所有的實數點均為正規點。

(b) 原微分方程式 $\left(x^2-1\right)y''-xy'+y=0$ 可改寫為 $y''-\dfrac{x}{x^2-1}y'+\dfrac{1}{x^2-1}y=0$，所以 $p(x)=-\dfrac{x}{x^2-1}$，$q(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$，因 $x=\pm1$ 時不可代入 $p(x)$ 與 $q(x)$，故 $x=\pm1$ 為本題之奇異點，其他實數點均為正規點。