

提要 118 : *Frobenius* 解法簡介

首先介紹 *Frobenius* 解法，這也是一個定理，主要是用來解析微分方程式用的。

定理 : *Frobenius* 解法

若 $b(x)$ 與 $c(x)$ 在 $x = 0$ 是解析的 (*Analytic*)，則任意型式可表為 $y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0$ 之微分方程式，其解至少有一個可表為：

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

式中 $a_0 \neq 0$ ， r 則是實數或複數。

附註：

1. $b(x)$ 與 $c(x)$ 在 $x = 0$ 是解析的，係指 $b(x)$ 與 $c(x)$ 可以 $x = 0$ 為中心點，將其分別表為如下所示之冪級數 (*Power Series*)：

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

$$c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

2. *Frobenius* 解法中之特徵根 r 若是等於零，即表示其解法與冪級數解法 (*Power Series Method*) 相同。若想要很快知道 r 值之大小，就必需記住 *Indicial* 方程式 $r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$ 。茲舉一例說明 *Frobenius* 方法之應用。

範例一

試求微分方程式 $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ 之解。

解答：

令問題之解為：

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots$$

再代回原微分方程式 $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ ，則：

$$\begin{aligned} & (x^2 - x)(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots)'' \\ & - x(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots)' \\ & + (a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$(x^2 - x) \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \right)'' - x \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \right)' + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \right) = 0 \quad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned} & (x^2 - x) [r(r-1)a_0 x^{r-2} + a_1(r+1)rx^{r-1} + a_2(r+2)(r+1)x^r + \dots] \\ & - x [ra_0 x^{r-1} + a_1(r+1)x^r + a_2(r+2)x^{r+1} + \dots] \\ & + (a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots) = 0 \end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{ccccccc} & r(r-1)a_0 x^r & + a_1(r+1)rx^{r+1} & + a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & + \dots & & \\ -r(r-1)a_0 x^{r-1} & - a_1(r+1)rx^r & - a_2(r+2)(r+1)x^{r+1} & - a_3(r+3)(r+2)x^{r+2} & - \dots & & \\ & - a_0 rx^r & - a_1(r+1)x^{r+1} & - a_2(r+2)x^{r+2} & - \dots & & \\ & + a_0 x^r & + a_1 x^{r+1} & + a_2 x^{r+2} & + \dots & = & 0 \end{array}$$

因 x^{r-1} 、 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互為線性獨立，且其和為零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases} -r(r-1)a_0 = 0 \\ r(r-1)a_0 - (r+1)ra_1 - ra_0 + a_0 = 0 \\ (r+1)ra_1 - (r+2)(r+1)a_2 - (r+1)a_1 + a_1 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 - (r+3)(r+2)a_3 - (r+2)a_2 + a_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

上式可再整理為：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 = 0 & (2a) \\ (r-1)^2 a_0 - (r+1)ra_1 = 0 & (2b) \\ r^2 a_1 - (r+2)(r+1)a_2 = 0 & (2c) \\ (r+1)^2 a_2 - (r+2)(r+3)a_3 = 0 & (2d) \\ \vdots \end{cases}$$

由定理知， $a_0 \neq 0$ ，故式(2a)應改寫為：

$$r(r-1)=0$$

上面這個方程式稱為 **Indicial 方程式**，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 **Indicial 方程式** 知：

$$r = 0, 1$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下， a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、...等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1$ 的情況，然後再說明 $r = 0$ 的情況。

① 當 $r = 1$ 時

因 $r = 1$ ，故式(2b)-(2d)可改寫為：

$$\begin{cases} (1-1)^2 a_0 - (1+1)(1)a_1 = 0 & (2b') \\ 1^2 a_1 - (1+2)(1+1)a_2 = 0 & (2c') \\ (1+1)^2 a_2 - (1+2)(1+3)a_3 = 0 & (2d') \\ \vdots \end{cases}$$

由式(2b')知：

$$(0)a_0 - 2a_1 = 0$$

故：

$$a_1 = 0$$

請留意由式(2b')知 $a_1 = 0$ ，而不是 $a_0 = 0$ ，有非常高比例的讀者會誤以為 $a_0 = 0$ 。其實不是，是 $a_1 = 0$ 才對。將 $a_1 = 0$ 代入式(2c')，則式(2c')應改寫為：

$$1^2(0) - (1+2)(1+1)a_2 = 0$$

故：

$$a_2 = 0$$

再將 $a_2 = 0$ 代入式(2d')，可知：

$$(1+1)^2(0) - (1+2)(1+3)a_3 = 0$$

故：

$$a_3 = 0$$

依此類推，應可求出 $a_4 = a_5 = a_6 = \dots = 0$ 之結果。基於此，問題之第一個解可表為：

$$y(x) = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \dots = a_0x \quad (3)$$

② 當 $r = 0$ 時

當 $r = 0$ 時，表Frobenius解法可以冪級數解法(Power Series Method)取代。但也只能以冪級數解法找到其中一個解，因當 $r = 1$ 時，冪級數解法是怎麼樣解也解不出來的。現在，因 $r = 0$ ，故式(2b)-(2d)可改寫為：

$$\begin{cases} (0-1)^2 a_0 - (0+1)(0)a_1 = 0 & (2b'') \\ 0^2 a_1 - (0+2)(0+1)a_2 = 0 & (2c'') \\ (0+1)^2 a_2 - (0+2)(0+3)a_3 = 0 & (2d'') \\ \vdots & \end{cases}$$

由式(2b'')知：

$$a_0 - 0 = 0$$

故：

$$a_0 = 0$$

顯然這是有矛盾的，也就是說，以現在所示之解題方式推求其解，是不能找出問題之第二個解的。通常，這個時候，應嘗試另一種推求第二個解的方法，這個方法稱為降階法(*Reduction of Order*)。其實，任何題目只要能夠先找出第一個解，則第二個解總是能以降階法解析出來。但是，因為降階法的計算時間較長，所以一般情況下，降階法是擔任第二線的救火責任。

• 以降階法重新推導問題之第二個解

由降階法知，若 y_1 與 y_2 互為線性獨立，則其相除的結果會與變數 x 有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x)$$

現在，考慮 $y_1 = x$ ，則：

$$y_2 = xu$$

再將上式代回原式，則：

$$(x^2 - x)(xu)'' - x(xu)' + (xu) = 0$$

上式可化簡為：

$$(x^2 - x)(2u' + xu'') - x(u + xu') + (xu) = 0$$

故：

$$(x^3 - x^2)u'' + (2x^2 - 2x - x^2)u' = 0$$

因此：

$$(x^3 - x^2)u'' = (-x^2 + 2x)u'$$

或：

$$\frac{u''}{u'} = \frac{-x+2}{x^2-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}$$

上式等號左右兩邊同時對變數 x 作積分，則：

$$\int \frac{u''}{u'} dx = -\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx$$

在以降階法推求第二個解之過程，並不需要加積分常數。若讀者覺得一定要加，也會得出相同之最後的通解(*General Solution*)。上式之積分結果為：

$$\ln u' = -2\ln x + \ln(x-1)$$

合併等號右邊之兩個項次後可知：

$$\ln u' = \ln \frac{x-1}{x^2}$$

故：

$$u' = \frac{x-1}{x^2}$$

再對上式作對 x 變數的積分，即可求出 $u(x)$ ：

$$\int u' dx = \int \frac{x-1}{x^2} dx$$

其積分結果為：

$$u = \ln x + \frac{1}{x}$$

因問題之第二個解為 $y_2 = xu$ ，故：

$$y_2 = x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) = x \ln x + 1 \quad (4)$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個**基底**(*Basis*)。因原微分方程式為線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln x + 1)$$

範例二

試求微分方程式 $(x^2 + x)y'' - xy' + y = 0$ 之解。

解答：

令問題之解為：

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots$$

再代回原微分方程式 $(x^2 + x)y'' - xy' + y = 0$ ，則：

$$\begin{aligned} & (x^2 + x)(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots)'' \\ & - x(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots)' \\ & + (a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$(x^2 + x) \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \right)'' - x \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \right)' + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \right) = 0 \quad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned} & (x^2 + x) [r(r-1)a_0 x^{r-2} + a_1(r+1)rx^{r-1} + a_2(r+2)(r+1)x^r + \dots] \\ & - x [ra_0 x^{r-1} + a_1(r+1)x^r + a_2(r+2)x^{r+1} + \dots] \\ & + (a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots) = 0 \end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{cccccccc} & r(r-1)a_0 x^r & + a_1(r+1)rx^{r+1} & + a_2(r+2)(r+1)x^{r+2} & + \dots & & & \\ +r(r-1)a_0 x^{r-1} & + a_1(r+1)rx^r & + a_2(r+2)(r+1)x^{r+1} & + a_3(r+3)(r+2)x^{r+2} & + \dots & & & \\ & - a_0 rx^r & - a_1(r+1)x^{r+1} & - a_2(r+2)x^{r+2} & - \dots & & & \\ & + a_0 x^r & + a_1 x^{r+1} & + a_2 x^{r+2} & + \dots & = & 0 & \end{array}$$

因 x^{r-1} 、 x^r 、 x^{r+1} 、 x^{r+2} 等互為線性獨立，且其和為零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 = 0 \\ r(r-1)a_0 + (r+1)ra_1 - ra_0 + a_0 = 0 \\ (r+1)ra_1 + (r+2)(r+1)a_2 - (r+1)a_1 + a_1 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 + (r+3)(r+2)a_3 - (r+2)a_2 + a_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

上式可再整理為：

$$\begin{cases} r(r-1)a_0 = 0 & (2a) \\ (r-1)^2 a_0 + (r+1)ra_1 = 0 & (2b) \\ r^2 a_1 + (r+2)(r+1)a_2 = 0 & (2c) \\ (r+1)^2 a_2 + (r+2)(r+3)a_3 = 0 & (2d) \\ \vdots \end{cases}$$

由定理知， $a_0 \neq 0$ ，故式(2a)應改寫為：

$$r(r-1) = 0$$

上面這個方程式稱為 **Indicial 方程式**，實際上就是特徵方程式的另一種稱呼方式。由 *Indicial* 方程式知：

$$r = 0, 1$$

一般而言，先討論 r 值較大的情況下， a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、...等係數間之關係，解題過程會較清楚，故以下先討論 $r = 1$ 的情況，然後再說明 $r = 0$ 的情況。

① 當 $r = 1$ 時

因 $r = 1$ ，故式(2b)-(2d)可改寫為：

$$\begin{cases} (1-1)^2 a_0 + (1+1)(1)a_1 = 0 & (2b') \\ 1^2 a_1 + (1+2)(1+1)a_2 = 0 & (2c') \\ (1+1)^2 a_2 + (1+2)(1+3)a_3 = 0 & (2d') \\ \vdots \end{cases}$$

由式(2b')知：

$$(0)a_0 + 2a_1 = 0$$

故：

$$a_1 = 0$$

請留意由式(2b')知 $a_1 = 0$ ，而不是 $a_0 = 0$ ，有非常高比例的讀者會誤以為 $a_0 = 0$ 。其實不是，是 $a_1 = 0$ 才對。將 $a_1 = 0$ 代入式(2c')，則式(2c')應改寫為：

$$1^2(0) + (1+2)(1+1)a_2 = 0$$

故：

$$a_2 = 0$$

再將 $a_2 = 0$ 代入式(2d')，可知：

$$(1+1)^2(0) + (1+2)(1+3)a_3 = 0$$

故：

$$a_3 = 0$$

依此類推，應可求出 $a_4 = a_5 = a_6 = \dots = 0$ 之結果。基於此，問題之第一個解可表為：

$$y(x) = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \dots = a_0x \quad (3)$$

② 當 $r = 0$ 時

當 $r = 0$ 時，表 *Frobenius* 解法可以冪級數解法(*Power Series Method*)取代。但也只能以冪級數解法找到其中一個解，因當 $r = 1$ 時，冪級數解法是怎麼樣解也解不出來的。現在，因 $r = 0$ ，故式(2b)-(2d)可改寫為：

$$\begin{cases} (0-1)^2 a_0 + (0+1)(0)a_1 = 0 & (2b'') \\ 0^2 a_1 + (0+2)(0+1)a_2 = 0 & (2c'') \\ (0+1)^2 a_2 + (0+2)(0+3)a_3 = 0 & (2d'') \\ \vdots & \end{cases}$$

由式(2b'')知：

$$a_0 - 0 = 0$$

故：

$$a_0 = 0$$

顯然這是有矛盾的，也就是說，以現在所示之解題方式推求其解，是不能找出問題之第二個解的。通常，這個時候，應嘗試另一種推求第二個解的方法，這個方法稱為降階法(*Reduction of Order*)。其實，任何題目只要能夠先找出第一個解，則第二個解總是能以降階法解析出來。但是，因為降階法的計算時間較長，所以一般情況下，降階法是擔任第二線的救火責任。

• 以降階法重新推導問題之第二個解

由降階法知，若 y_1 與 y_2 互為線性獨立，則其相除的結果會與變數 x 有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x)$$

現在，考慮 $y_1 = x$ ，則：

$$y_2 = xu$$

再將上式代回原式，則：

$$(x^2 + x)(xu)'' - x(xu)' + (xu) = 0$$

上式可化簡為：

$$(x^2 + x)(2u' + xu'') - x(u + xu') + (xu) = 0$$

故：

$$(x^3 + x^2)u'' + (2x^2 + 2x - x^2)u' = 0$$

因此：

$$(x^3 + x^2)u'' = (-x^2 - 2x)u'$$

或：

$$\frac{u''}{u'} = \frac{-x-2}{x^2+x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$$

上式等號左右兩邊同時對變數 x 作積分，則：

$$\int \frac{u''}{u'} dx = -\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

在以降階法推求第二個解之過程，並不需要加積分常數。若讀者覺得一定要加，也會得出相同之最後的通解(*General Solution*)。上式之積分結果為：

$$\ln u' = -2 \ln x + \ln(x+1)$$

合併等號右邊之兩個項次後可知：

$$\ln u' = \ln \frac{x+1}{x^2}$$

故：

$$u' = \frac{x+1}{x^2}$$

再對上式作對 x 變數的積分，即可求出 $u(x)$ ：

$$\int u' dx = \int \frac{x+1}{x^2} dx$$

其積分結果為：

$$u = \ln x - \frac{1}{x}$$

因問題之第二個解為 $y_2 = xu$ ，故：

$$y_2 = x \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) = x \ln x - 1 \quad (4)$$

式(3)與式(4)代表通解中之兩個**基底(Basis)**。因原微分方程式為線齊性微分方程式，故可引用重疊原理，將所研討出之式(3)與式(4)的解，作疊加的運算，得出問題的通解，如以下所示：

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln x - 1)$$