提要 116：*Legendre* 多項式 $P_n(x)$的推導

Legendre 多項式 $P_n(x)$與 *Legendre* 方程式$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0$、$n\in R$有關。欲解釋 *Legendre* 多項式，需先明白 *Legendre* 方程式之通解的解析過程。關於 *Legendre* 方程式之通解的解析過程與 *Legendre* 多項式的推導過程，請參考下面的說明。

範例一
試求 *Legendre* 方程式$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0$、$n\in R$的通解，並說明 *Legendre* 多項式 $P_n(x)$。

解答：

⦿ *Legendre* 方程式的通解

令問題之解為：

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

再代回原微分方程式$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0$，則：

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)''\\&\quad-2x\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)'\\&\quad+n(n+1)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表為：

$$\left(1-x^2\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)''-2x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)'+n(n+1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)=0 \tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&(1-x^2)(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots)\\&\quad-2x(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots)\\&\quad+n(n+1)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{ccccc}2a_2 & +6a_3x & +12a_4x^2 & +20a_5x^3 & +\cdots\\ & & -2a_2x^2 & -6a_3x^3 & -\cdots\\ & -2a_1x & -4a_2x^2 & -6a_3x^3 & -\cdots\\ +n(n+1)a_0 & +n(n+1)a_1x & +n(n+1)a_2x^2 & +n(n+1)a_3x^3 & +\cdots=0\end{array}$$

因 x^{r-2} 、 x^{r-1} 、 x^r 、 x^{r+1} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}2a_2+n(n+1)a_0=0\\6a_3+[n(n+1)-2]a_1=0\\12a_4+[n(n+1)-6]a_2=0\\20a_5+[n(n+1)-12]a_3=0\\\qquad\vdots\end{cases}$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases}2a_2+n(n+1)a_0=0, & (2a)\\6a_3+(n+2)(n-1)a_1=0, & (2b)\\12a_4+(n+3)(n-2)a_2=0, & (2c)\\20a_5+(n+4)(n-3)a_3=0, & (2d)\\\qquad\vdots\end{cases}$$

由式(2a)知：

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2}a_0=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0$$

再代入式(2c)，可知：

$$a_4 = -\frac{(n+3)(n-2)}{12}a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

另外，由式$(2b)$知：

$$a_3 = -\frac{(n+2)(n-1)}{6}a_1 = -\frac{(n+2)(n-1)}{3!}a_1$$

再代入式$(2d)$，可得：

$$a_5 = -\frac{(n+4)(n-3)}{20}a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

最後再將a_0、a_1、a_2、…等代回原式，則：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \\ &= a_0 + a_1x - \frac{n(n+1)}{2!}a_0x^2 - \frac{(n+2)(n-1)}{3!}a_1x^3 \\ &\quad + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0x^4 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1x^5 + \cdots \end{aligned}$$

上式可再合併同類項，將答案改寫為：

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x - \frac{(n+2)(n-1)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right] \end{aligned}}$$

上式即為 *Legendre* 方程式之通解，其中包含兩個未知常數a_0與a_1。

⊙ *Legendre* 多項式

令 *Legendre* 方程式通解中與a_0、a_1相關之函數分別為y_1、y_2，亦即：

$$\begin{cases} y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots \\ y_2 = x - \frac{(n+2)(n-1)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots \end{cases}$$

y_1與y_2稱爲通解中之基底(*Basis*)。

❶ 當 $n=0$ 時

當 $n=0$ 時，*Legendre* 方程式之通解的基底爲：

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = x - \frac{(2)(-1)}{3!}x^3 + \frac{(-3)(-1)(2)(4)}{5!}x^5 + \cdots \end{cases}$$

其中y_1爲有限項的和，以此爲目標，討論 0 階之 *Legendre* 多項式$P_0(x)$，也就是說，考慮：

$$P_0(x) = ky_1$$

其中係數 k 爲需調整之係數，使得$P_0(1)=1$。因$y_1 = 1$，故：

$$P_0(x) = k(1) = k$$

因需調整係數 k，使得$P_0(1)=1$，故$P_0(1)=k=1$。因此，0 階之 *Legendre* 多項式爲：

$$\boxed{P_0(x)=1}$$

❷ 當 $n=1$ 時

當 $n=1$ 時，*Legendre* 方程式之通解的基底爲：

$$\begin{cases} y_1 = 1 - x^2 - \frac{8}{24}x^4 + \cdots \\ y_2 = x \end{cases}$$

其中 y_2 爲有限項的和，以此爲目標，討論 1 階之 *Legendre* 多項式 $P_1(x)$，也就是說，考慮：

$$P_1(x)=ky_2$$

其中係數 k 爲需調整之係數，使得 $P_1(1)=1$。因 $y_2=x$，故：

$$P_1(x)=kx$$

因需調整係數 k，使得 $P_1(1)=1$，故 $P_1(1)=k=1$。因此，1 階之 *Legendre* 多項式爲：

$$\boxed{P_1(x)=x}$$

❸ 當 $n=2$ 時

當 $n=2$ 時，*Legendre* 方程式之通解的基底爲：

$$\begin{cases} y_1=1-3x^2 \\ y_2=x-\dfrac{4}{6}x^3-\dfrac{24}{120}x^5+\cdots \end{cases}$$

其中 y_1 爲有限項的和，以此爲目標，討論 2 階之 *Legendre* 多項式 $P_2(x)$，也就是說，考慮：

$$P_2(x)=ky_1$$

其中係數 k 爲需調整之係數，使得 $P_2(1)=1$。因 $y_1=1-3x^2$，故：

$$P_2(x)=k\left(1-3x^2\right)$$

因需調整係數 k，使得 $P_2(1)=1$，故 $P_2(1)=k(-2)=1$，因此，$k=-\dfrac{1}{2}$。所以，2 階之 *Legendre* 多項式爲：

$$\boxed{P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}}$$

❹ 當 $n=3$ 時

當 $n=3$ 時，*Legendre* 方程式之通解的基底爲：

$$\begin{cases} y_1=1-\dfrac{3(4)}{2!}x^2+\dfrac{(1)(3)(4)(6)}{4!}x^4+\cdots \\ y_2=x-\dfrac{5}{3}x^3 \end{cases}$$

其中 y_2 爲有限項的和，以此爲目標，討論 3 階之 *Legendre* 多項式 $P_3(x)$，也就是說，考慮：

$$P_3(x)=ky_2$$

其中係數 k 爲需調整之係數，使得 $P_3(1)=1$。因 $y_2=x-\frac{5}{3}x^3$，故：

$$P_3(x)=k\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)$$

因需調整係數 k，使得 $P_3(1)=1$，故 $P_3(1)=k\left(1-\frac{5}{3}\right)=1$，所以 $k=-\frac{3}{2}$。因此，3 階之 *Legendre* 多項式爲：

$$\boxed{P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x}$$

其餘之各種 *Legendre* 多項式均可以此方式推導出。以下爲所討論問題之整理，並將其他與 *Legendre* 多項式相關之式子一起作整理。

與 *Legendre* 多項式相關之方程式的整理

1. $P_0(x)=1$
2. $P_1(x)=x$
3. $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$
4. $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$
5. $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$
6. $P_5(x)=\frac{63}{8}x^5-\frac{35}{4}x^3+\frac{15}{8}x$
7. $P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$ ，其中 $M=\frac{n}{2}$ 或 $\frac{n-1}{2}$ (取整數)
8. $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ (*Rodrigues* 公式)
9. $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$ ， $n=0, 1, 2,\cdots$
10. $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$
11. $P_n'(-x)=(-1)^{n+1}P_n'(x)$
12. $P_n(1)=1$
13. $P_n(-1)=(-1)^n$
14. $P_{2n+1}(0)=0$
15. $P_{2n}(0)=(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)/2\cdot 4\cdots(2n)$
16. $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$ ， $n=1, 2, 3,\cdots$
17. $P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m[P_n(x)]}{dx^m}$
18. $(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx}=n\left[xP_n(x)-P_{n-1}(x)\right]=\frac{n(n+1)}{2n+1}\left[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\right]$